

ANALIZA DRGAŃ POPRZECZNYCH PŁYTY PIERŚCIENIOWEJ O ZŁOŻONYM KSZTAŁCIE Z UWZGLĘDNIENIEM WŁASNOŚCI CYKLICZNEJ SYMETRII UKŁADU

Streszczenie: W publikacji omawiane są drgania poprzeczne płyty pierścieniowej o złożonym kształcie. W procesie analizy wykorzystuje się metodę elementów skończonych. Rozważa się przydatność modeli, w których wykorzystuje się własności cyklicznej symetrii, w analizie drgań poprzecznych. Zaproponowano trzy modele numeryczne. Otrzymane z symulacji numerycznej wyniki zweryfikowano badaniami doświadczalnymi. Obliczenia numeryczne przeprowadzono w środowisku obliczeniowym ANSYS.

Słowa kluczowe: drgania poprzeczne, cykliczna symetria układu, płyta pierścieniowa.

TRANSVERSE VIBRATION ANALYSIS OF A COMPOUND ANNULAR PLATE WITH CYCLIC SYMMETRY MODELLING

Summary: In this article the transverse vibration of an arbitrary chosen annular plate with complex geometry is analysed on basis of the finite element (FE) method. The investigation is led to preparing the FE models by using cyclic symmetry modelling approach. Three numerical models are proposed and analysed. The received results are discussed and compared with the experimental results. FE models are prepared by using ANSYS software.

Keywords: transversal vibration, cyclic symmetry model, annular plate.

1. WPROWADZENIE

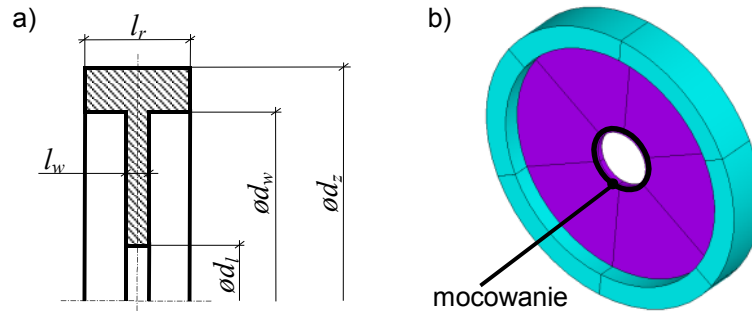
Zagadnienia drgań poprzecznych płyt kołowych i pierścieniowych są przedmiotem zainteresowania wielu badaczy oraz ośrodków badawczo-rozwojowych [1, 3]. Wynika to z faktu, że niektóre wirujące układy (np. koła zębate, dyski turbin) mogą być rozważane jako płyty kołowe bądź pierścieniowe, o kształcie odzwierciedlającym analizowane zespoły. Bardzo użytecznym i często stosowanym narzędziem w analizie drgań złożonych układów jest metoda elementów skończonych (MES) [2]. W pracach [1, 5], autorzy wykorzystali MES do analizy drgań poprzecznych kół zębatych z tarczami pełnymi oraz z tarczami z otworami przelotowymi. W publikacji [3], autorzy omówili drgania poprzeczne własne i wymuszone dysku turbiny wraz z łopatkami. W analizie stosowali różne metody numeryczne (MES i inne) oraz wykorzystali własności cyklicznej symetrii układu. Także w pracach [4, 5], autorzy wykorzystali własności cyklicznej symetrii w analizie drgań poprzecznych płyt pierścieniowych o złożonym kształcie. W pracy [5], płyty pierścieniowe stanowiły uproszczone modele kół zębatych. W artykule [4], omówiono wstępnie zagadnienia związane z dokładnością modeli z cykliczną symetrią. Prowadzone badania symulacyjne zweryfikowano dostępnymi, dla wybranych przypadków, danymi eksperymentalnymi. Publikacja książkowa [2], jest jedną z nowszych pozycji literaturowych omawiających kompleksowo zagadnienia teoretyczne drgań układów ciągłych i dyskretnych oraz metodykę pomiaru drgań.

W niniejszej publikacji omówione zostaną drgania własne poprzeczne płyt pierścieniowych o złożonym kształcie. W analizie wykorzystana zostanie metoda elementów skończonych. Rozpatrzone zostaną zagadnienia budowy modeli MES

analizowanych układów z uwzględnieniem własności cyklicznej symetrii oraz rozmiaru elementów skończonych. Dyskutowane wyniki badań symulacyjnych, zweryfikowane zostaną badaniami eksperymentalnymi, które prowadzono na wybranych obiektach rzeczywistych.

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Zasadniczym celem pracy jest omówienie metodyki budowy modeli MES płyt pierścieniowych o złożonym kształcie. W procesie modelowania uwzględnia się własności cyklicznej symetrii oraz parametry elementów skończonych siatki. Opracowane modele MES są przewidziane do analizy drgań poprzecznych omawianych układów.



Rys. 2.1. Model geometryczny i wymiary płyty pierścieniowej

W rozważaniach wykorzystuje się dwie płyty o kształcie zdefiniowanym na rys. 2.1. Podstawowe wymiary geometryczne i parametry techniczne, przyjętych do analizy układów, podano w tabeli 2.1.

Tab. 2.1 Dane techniczne badanych obiektów

Lp.	d_z [m]	d_w [m]	ρ [kg/m ³]	d_l [m]	l_r [m]	l_w [m]	E [Pa]	ν
1	0.191	0.159	$7.85 \cdot 10^3$	0.02	0.008	0.002	$2.1 \cdot 10^{11}$	0.28
2	0.203	0.147	$7.85 \cdot 10^3$					

gdzie:

d_z, d_w, d_l, l_r, l_w to wymiary obiektów zdefiniowane na rys. 2.1,

ρ to gęstość masy układów,

E to moduł Younga,

ν to współczynnik Poissona.

Jak wspomniano wcześniej, zagadnienie drgań własnych rozwiązano metodą elementów skończonych. Po dyskretyzacji każdego z układów (proces nakładania siatki), dynamiczne równania ruchu można zapisać w postaci macierzowej w formie zależności [2]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

\mathbf{M}, \mathbf{K} to macierze bezwładności i sztywności w układzie globalnym,

$\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}$ to wektory przyspieszeń i przemieszczeń węzłowych.

Globalne macierze \mathbf{M} i \mathbf{K} otrzymuje się po scałkowaniu macierzy mas i sztywności:

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \rho^{(e)} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV^{(e)}, \quad \mathbf{K}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \rho^{(e)} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV^{(e)} \quad (2.2)$$

$\mathbf{M}^{(e)}, \mathbf{K}^{(e)}$ to macierze mas i sztywności elementu,

$\rho^{(e)}$ to gęstość elementu,

$V^{(e)}$ to objętość elementu,

\mathbf{N} to macierz funkcji kształtu,

\mathbf{B}, \mathbf{E} to macierze pochodnych funkcji kształtu i sztywności materiałowej.

Częstości drgań własnych otrzymuje się z rozwiązania zagadnienia własnego:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.3)$$

ω to częstość własna,

$\bar{\mathbf{u}}$ to wektor własny (postać drgań własnych)

Liczba par $(\omega_i, \bar{\mathbf{u}}_i)$ równa jest liczbie stopni swobody układu. Do rozwiązania zagadnienia własnego (2.3) stosuje się metodę blokową Lanczosa [2]. Z powodu dyskretyzacji, modele MES układów, traktowane są jako aproksymacje układów rzeczywistych. Dokładność opracowanych modeli MES ustala się na podstawie błędu częstości, zdefiniowanego w formie:

$$\varepsilon = (\omega^f - \omega^c) / \omega^c \cdot 100\% \quad (2.4)$$

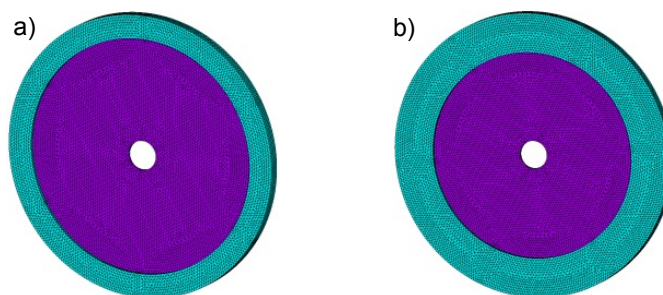
ω^f to częstość drgań własnych z modelu numerycznego,

ω^c to częstość drgań własnych obiektu.

Zależność (2.4) nazywana jest tzw. błędem częstości [2].

3. ANALIZA NUMERYCZNA

W tym rozdziale omówiona zostanie metodyka budowy modeli MES rozważanych układów oraz wyniki symulacji numerycznych. Modele te w dalszej kolejności wykorzystane zostaną do wyznaczenia częstości drgań własnych poprzecznych analizowanych układów. Zgodnie z klasyczną teorią drgań płyt kołowych i pierścieniowych, poszczególne częstości własne oznaczać będziemy przez ω_{mn} gdzie m odnosi się do liczby okręgów węzłowych a n oznacza liczbę średnic węzłowych [2].



Rys. 3.1. (a) pierwszy model MES obiektu nr 1, (b) pierwszy model MES obiektu nr 2

W każdym przypadku modelu, omawianych obiektów, obliczenia numeryczne prowadzono do momentu wyznaczenia częstości własnej $\omega_{1,6}$. Dla każdego rozważanego obiektu opracowano trzy modele MES.

Pierwszy model MES opracowano następująco. Na pełne modele geometryczne obiektów (rys. 2.1) nałożono siatkę, wykorzystując standardowe procedury programu ANSYS. W procesie nakładania siatki przyjęto, że długość krawędzi elementu nie przekracza wartości 2 [mm] . Zastosowano element bryłowy (solid187), czworościenny, dziesięciowęzłowy o trzech stopniach swobody w każdym węźle. Otrzymane modele MES zawierają odpowiednio: 97404 elementy w przypadku modelu obiektu nr 1 oraz 143760 elementów w przypadku modelu obiektu nr 2 (tabela 2.1). Modele te pokazano na rys. 3.1. W tabelach 3.1 i 3.2 zamieszczono wygenerowane z omawianych modeli MES wartości częstości własnych odnoszących się do poszczególnych obiektów.

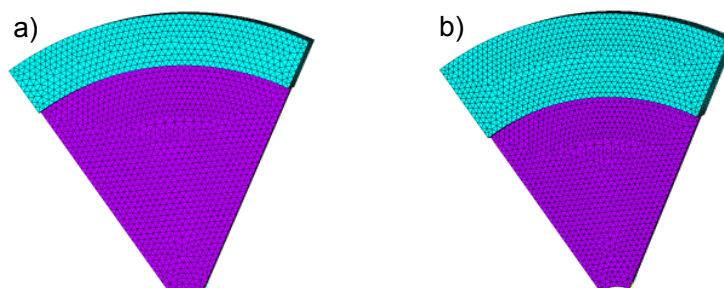
Tab. 3.1 Częstości własne z pierwszego modelu MES odnoszące się do pierwszego obiektu ω_{mn} [Hz]

		<i>n</i>						
		0	1	2	3	4	5	6
<i>m</i>	1	236.5	149.4	643.6	1770	3340	5292	7523
	2	1932	2240	2899	3931	5327	7009	
	3	4531	5167	6580				

Tab. 3.2 Częstości własne z pierwszego modelu MES odnoszące się do drugiego obiektu ω_{mn} [Hz]

		<i>n</i>						
		0	1	2	3	4	5	6
<i>m</i>	1	213.5	123.4	658.9	1804	3398	5403	7781
	2	1916	2458	3337	4507	6059		
	3	4109	4680	6321				

Drugi model MES opracowano wykorzystując własności cyklicznej symetrii układów. Na rys. 2.1 łatwo zauważyć, że modele geometryczne każdego z obiektów, składają się z sześciu jednakowych segmentów, posiadających własności cyklicznej symetrii. Na jeden z takich segmentów nałożono siatkę MES zgodnie z zasadami omówionymi przy okazji opracowywania pierwszego modelu MES. Dodatkowo wprowadzono jeszcze warunki brzegowe uwzględniające cykliczną symetrię. Opracowane modele MES zawierają odpowiednio: 16234 elementy w przypadku modelu obiektu nr 1 oraz 23960 elementów w przypadku modelu obiektu nr 2. Modele te pokazano na rys. 3.2.



Rys. 3.2. Modele MES z cykliczną symetrią; (a) drugi model MES obiektu nr 1, (b) drugi model MES obiektu nr 2

W tabelach 3.3 i 3.4 zamieszczono wartości częstotliwości własnych wyznaczonych z wykorzystaniem omawianych modeli MES z cykliczną symetrią.

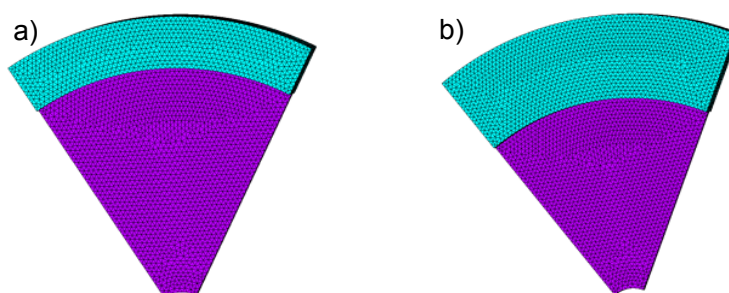
Tab. 3.3 Częstotliwości własne z drugiego modelu MES (z cykliczną symetrią) odnoszące się do pierwszego obiektu ω_{mn} [Hz]

		<i>n</i>						
		0	1	2	3	4	5	6
<i>m</i>	1	236.4	149.4	643.6	1770	3340	5292	7523
	2	1935	2240	2898	3930	5327	7009	
	3	4530	5166	6579				

Tab. 3.4 Częstotliwości własne z drugiego modelu MES (z cykliczną symetrią) odnoszące się do drugiego obiektu ω_{mn} [Hz]

		<i>n</i>						
		0	1	2	3	4	5	6
<i>m</i>	1	213.5	123.3	658.9	1804	3398	5403	7781
	2	1916	2457	3336	4507	6059		
	3	4108	4679	6321				

W trzecim modelu MES, podobnie jak w drugim, uwzględniono własności cyklicznej symetrii układu. W każdym przypadku modelu obiektu na jeden segment nałożono siatkę MES przy założeniu, że długość krawędzi elementu jest nie większa niż $1.5[mm]$, co stanowi wartość mniejszą niż grubość cieńszych obszarów płyt (rys. 2.1, tab. 2.1). Opracowane modele MES zawierają odpowiednio: 38131 elementów w przypadku modelu obiektu nr 1 oraz 57834 elementy w przypadku modelu obiektu nr 2. Modele te przedstawiono na rys. 3.3.



Rys. 3.3. Modele MES z cykliczną symetrią; (a) trzeci model MES obiektu nr 1, (b) trzeci model MES obiektu nr 2

W tabelach 3.5 i 3.6 zamieszczono wartości częstotliwości drgań własnych porzecznych wyznaczonych z wykorzystaniem opracowanych modeli MES z cykliczną symetrią.

Tab. 3.5 Częstotliwości własne z trzeciego modelu MES (z cykliczną symetrią) odnoszące się do pierwszego obiektu ω_{mn} [Hz]

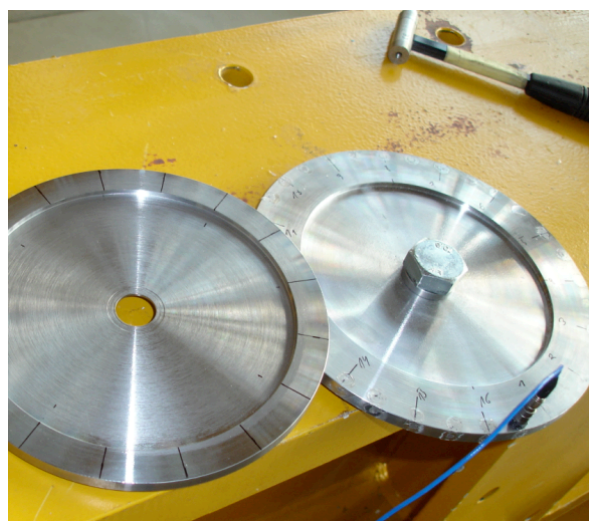
		<i>n</i>						
		0	1	2	3	4	5	6
<i>m</i>	1	235.8	148.9	643.4	1770	3340	5291	7519
	2	1928	2233	2890	3922	5317	6997	
	3	4520	5157	6566				

Tab. 3.6 Częstotliwości własne z trzeciego modelu MES (z cykliczną symetrią) odnoszące się do drugiego obiektu ω_{mn} [Hz]

		<i>n</i>						
		0	1	2	3	4	5	6
<i>m</i>	1	212.8	122.9	658.8	1804	3398	5403	7781
	2	1913	2452	3326	4496	6046		
	3	4092	4666	6312				

4. EKSPERYMENT POMIAROWY

Eksperyment pomiarowy przeprowadzono na dwóch obiektach o geometrii jak na rys. 2.1 i parametrach technicznych omówionych w tabeli 2.1. W pomiarach stosowano system pomiarowy firmy LMS. Zestaw pomiarowy składał się z: młotka modalnego firmy PCB model 086C03, wyposażonego w stalową końcówkę, czujnika przyspieszenia PCB model 353B18, systemu archiwizacji danych LMS SCADA oraz modułu pomiarowego typu SCM-V4E, obsługiwanego przez oprogramowanie LMS Test.Lab.



Rys. 4.1. Badania eksperymentalne

Badania zaplanowano tak aby wzbudzić i zidentyfikować częstości własne oraz odpowiadające im postacie drgań własnych poprzecznych. Każdy z badanych obiektów przymocowano połączeniem śrubowym do układu o dużej masie i znacznych wymiarach geometrycznych. Podczas eksperymentu, każdy z obiektów wzbudzano poprzez uderzenie młotkiem modalnym w jeden punkt obiektu. Odpowiedź układu mierzono w 32 punktach pomiarowych równomiernie rozmieszczonych na obwodzie każdego obiektu.

Tab. 4.1 Częstotliwości drgań własnych poprzecznych pierwszego obiektu ω_{mn} [Hz] (badania doświadczalne)

		<i>n</i>						
		0	1	2	3	4	5	6
<i>m</i>	1	263.8	141.9	575.6	1697	3272	5233	7463
	2	1847	2247	2948	3976	5318	6941	
	3	4397	5001	6453				

Tab. 4.2 Częstotliwości drgań własnych poprzecznych drugiego obiektu ω_{mn} [Hz] (badania doświadczalne)

		<i>n</i>						
		0	1	2	3	4	5	6
<i>m</i>	1	221.3	106.3	596.3	1740		5330	7709
	2		2444	3254	4389			
	3							

Wartości wzbudzonych i zidentyfikowanych częstotliwości własnych zamieszczono w tabelach 4.1 i 4.2. Jak łatwo zauważyć, nie wszystkie częstotliwości własne udało się zidentyfikować. Dotyczy to w szczególności obiektu nr 2 (tab. 4.2), dla którego zidentyfikowano jedynie dziewięć częstotliwości własnych. Zidentyfikowane wartości częstotliwości własnych porównano z wynikami wygenerowanymi z zaproponowanych modeli numerycznych MES (tab. 3.1–3.6), rozważanych obiektów. W tabelach 4.3–4.5 zamieszczono błędy częstości (zależność (2.4)) odnoszące się do zaproponowanych modeli MES obiektu nr 1.

Tab. 4.3 Błąd częstości odnoszący się do pierwszego modelu MES obiektu nr 1 ε_{mn} [%]

		<i>n</i>						
		0	1	2	3	4	5	6
<i>m</i>	1	-10.35	5.29	11.81	4.3	2.08	1.13	0.8
	2	4.6	-0.31	-1.66	-1.13	0.17	0.98	
	3	3.05	3.32	1.97				

Tab. 4.4 Błąd częstości odnoszący się do drugiego modelu MES obiektu nr 1 ε_{mn} [%]

		<i>n</i>						
		0	1	2	3	4	5	6
<i>m</i>	1	-10.39	5.29	11.81	4.3	2.08	1.13	0.8
	2	4.76	-0.31	-1.7	-1.16	0.17	0.98	
	3	3.02	3.3	1.95				

Tab. 4.5 Błąd częstości odnoszący się do trzeciego modelu MES obiektu nr 1 ε_{mn} [%]

		<i>n</i>						
		0	1	2	3	4	5	6
<i>m</i>	1	-10.61	4.93	11.78	4.3	2.08	1.11	0.75
	2	4.39	-0.62	-1.97	-1.36	-0.02	0.81	
	3	2.8	3.12	1.75				

Analizując wyznaczone błędy częstości, zauważa się, że w każdym przypadku modelu MES obiektu nr 1, jedynie przy dwóch częstościach własnych, błąd częstości wynosi nieznacznie powyżej 10 %. W kolejnych tabelach (tab. 4.6–4.8) pokazano błędy częstości odnoszące się do modeli MES drugiego obiektu.

Tab. 4.6 Błąd częstości odnoszący się do pierwszego modelu MES obiektu nr 2 ε_{mn} [%]

		<i>n</i>						
		0	1	2	3	4	5	6
<i>m</i>	1	-3.53	16.09	10.5	3.68		1.37	0.93
	2		0.57	2.55	2.69			
	3							

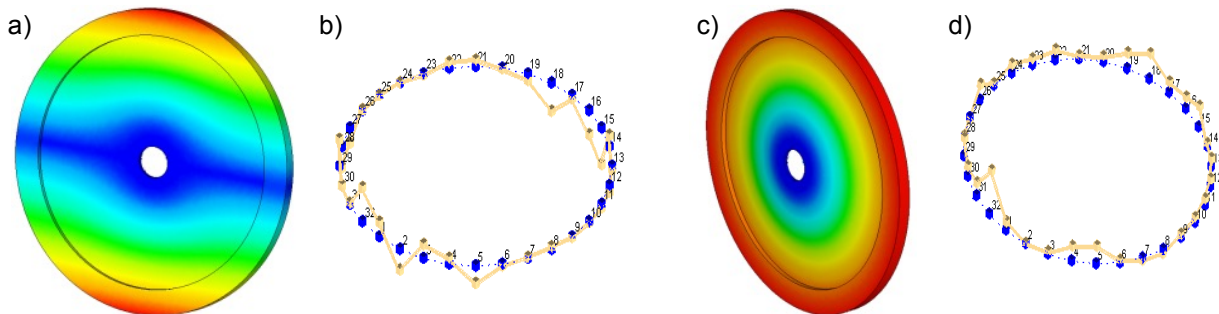
Tab. 4.7 Błąd częstości odnoszący się do drugiego modelu MES obiektu nr 2 ε_{mn} [%]

		n						
		0	1	2	3	4	5	6
m	1	-3.53	16	10.5	3.68		1.37	0.93
	2		0.53	2.52	2.69			
	3							

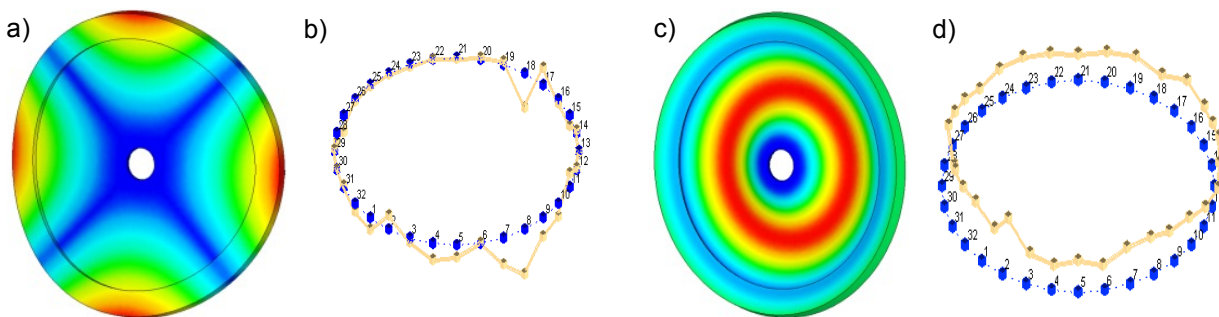
Tab. 4.8 Błąd częstości odnoszący się do trzeciego modelu MES obiektu nr 2 ε_{mn} [%]

		n						
		0	1	2	3	4	5	6
m	1	-3.84	15.62	10.48	3.68		1.37	0.93
	2		0.33	2.21	2.44			
	3							

W odniesieniu do wyników dotyczących obiektu nr 2, dysponujemy nieco uboższymi danymi, nie mniej jednak zauważa się, podobnie jak poprzednio, że dla dwóch przypadków częstotliwości własnych, błąd częstości jest powyżej 10 % we wszystkich zaproponowanych modelach. Na rys. 4.2–4.3 pokazano cztery postacie drgań poprzecznych otrzymane z drugiego modelu MES i eksperymentu pomiarowego dla obiektu nr 1.



Rys. 4.2. Postacie własne: (a) \bar{u}_{11} (MES), (b) \bar{u}_{11} (eksper.), (c) \bar{u}_{10} (MES), (d) \bar{u}_{10} (eksper.)



Rys. 4.3. Postacie własne: (a) \bar{u}_{12} (MES), (b) \bar{u}_{12} (eksper.), (c) \bar{u}_{20} (MES), (d) \bar{u}_{20} (eksper.)

Otrzymane rezultaty są obiecujące. W obydwu rozważanych obiektach zauważa się, że najlepsze dopasowanie do wyników badań eksperymentalnych występuje w przypadku trzeciego modelu MES.

4. UWAGI I WNIOSKI

W artykule analizowano drgania poprzeczne płyt pierścieniowych o złożonym kształcie. Trzy modele MES zaproponowano do rozwiązania zagadnienia drgań własnych,

omawianych układów. Otrzymane z symulacji numerycznej wyniki zweryfikowano badaniami doświadczalnymi. We wszystkich rozpatrywanych przypadkach uzyskano porównywalne rezultaty. Najbardziej atrakcyjny, ze względu na najmniejszą liczbę elementów, wydaje się być drugi zaproponowany model MES. Warto jeszcze nadmienić, że model ten tworzono przy założeniu, że długość krawędzi elementów skończonych może być nie większa od grubości modelowanej płyty w cieńszym obszarze. Z prezentowanych rezultatów wynika, że koniecznym jest prowadzenie dalszych badań w omawianym obszarze.

LITERATURA

- [1] Bogacz R., Noga S.: *Free transverse vibration analysis of a toothed gear*. Archive of Applied Mechanics 82 (2012) 1159–1168, DOI: 10.1007/s00419-012-0608-6.
- [2] de Silva C.: *Vibration and Shock Handbook*, Taylor & Francis, Boca Raton, 2005.
- [3] Grolet A., Thouverez F.: *Free and forced vibration analysis of a nonlinear system with cyclic symmetry: Application to a simplified model*. Journal of Sound and Vibration 331 (2012) 2911–2928.
- [4] Noga S.: *Transverse vibration analysis of a compound plate with using cyclic symmetry modeling*. Vibration in Physical Systems vol. XXVI (2014) 211–216.
- [5] Noga S., Bogacz R., Frischmuth K.: *Vibration analysis of toothed gear with cyclic symmetry modelling*. Vibration in Physical Systems vol. XXV (2012) 299–304.