

dr inż. Jacek PACANA  
[pacana@prz.edu.pl](mailto:pacana@prz.edu.pl)  
Politechnika Rzeszowska

dr inż. Jadwiga PISULA  
[jpisula@prz.edu.pl](mailto:jpisula@prz.edu.pl)  
Politechnika Rzeszowska

## NUMERYCZNE WYBRANE METODY WYZNACZANIA ŚLADU WSPÓŁPRACY PRZEKŁADNI ZĘBATEJ NA PRZYKŁADZIE PARY STOŻKOWEJ O KOŁOWO-ŁUKOWEJ LINII ZĘBA

**Streszczenie:** W artykule przedstawiono metody otrzymywania śladu współpracy przekładni zębatych, który stanowi jeden z najważniejszych wskaźników jakości pracy przekładni. Szczegółowo zaprezentowano metodę uzyskiwania śladu współpracy przekładni opartą na wynikach obliczeń numerycznych z wykorzystaniem metody elementów skończonych (MES) z zastosowaniem siatki odniesienia zdefiniowanej w modelu matematycznym generowania uzębienia. Analizy wykonano dla przekładni stożkowej o kołowej linii zęba. Rezultaty śladów styku otrzymano wg metody numerycznej oraz z modelu matematycznego porównano.

**Słowa kluczowe:** zębata stożkowa o kołowej linii zęba, ślad współpracy.

## THE NUMERICAL METHODS FOR DETERMINING OF THE GEAR CONTACT PATTERN ON THE EXAMPLE OF THE SPIRAL BEVEL GEAR

**Summary:** This article presents the selected methods for obtaining the gears contact pattern, which is one of the most important indicators of the quality of gear work. The method of obtaining the gear contact pattern based on the results of the numerical computation FEM, using a reference grid defined in the mathematical model to generate teeth, was presented in details. Analyses were performed for the spiral bevel gear. The contact pattern results obtained by the improved numerical methods and the mathematical model were compared.

**Keywords:** spiral bevel gear, contact pattern.

### 1. WPROWADZENIE

Przekładnie stosowane w lotnictwie ze względu na warunki pracy tj.: wysokie prędkości obwodowe i pełne obciążenie oraz wysoką żywotność, wymagają spełnienia szczegółowych założeń podczas etapu ich projektowania. W fazie wykonywania prototypów i produkcji, spełnienie wymagań dotyczących niezawodności i jakości pracy przekładni, wiąże się z przeprowadzaniem wnikliwej kontroli geometrycznej i metalograficznej elementów składowych przekładni oraz z sprawdzeniem jakości współpracy zazębienia [1]. Do oceny poprawnej współpracy przekładni zębatej brany jest pod uwagę ślad współpracy oraz wykres nierównomierności ruchu. Dla przekładni lotniczych podstawowym i najważniejszym wskaźnikiem jakości przekładni stożkowej, na jakim skupiana jest uwaga w cyklu projektowania, jest ślad współpracy zazębienia. Ślad ten jest następnie kontrolowany w procesie produkcji.

## 2. METODY WYZNACZANIA ŚLADU

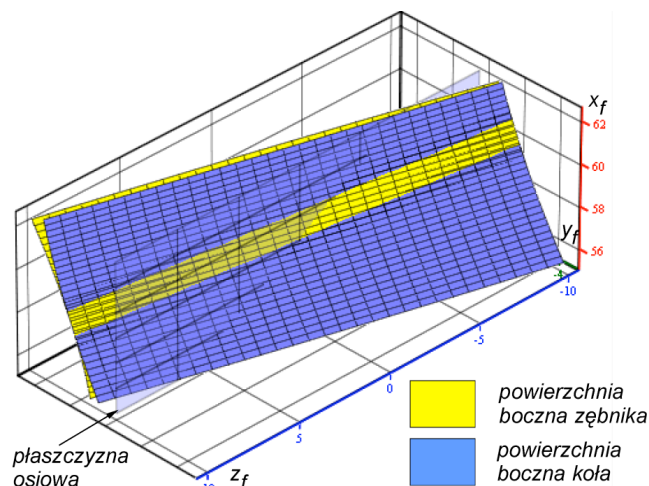
W literaturze wyróżnia się następujące pojęcia dotyczące określania kontaktu ząbów: chwilowy oraz sumaryczny ślad styku. Ślad styku, zwany również chwilowym śladem styku, jest to powierzchnia na boku zęba, na której dochodzi do kontaktu ze współpracującą powierzchnią drugiego zęba w danej chwili. Natomiast sumaryczny ślad styku, zwany także śladem współpracy, jest sumą boolowską śladów styku na powierzchni boku zęba otrzymanym podczas pracy przekładni [10].

Ślady współpracy czy też ślady styku dzieli się na otrzymane bez obciążenia i z obciążeniem, które nazywa się odpowiednio analizą TCA (tooth contact analysis) oraz LTCA (loaded tooth contact analysis) [2][3][4].

W literaturze znanych jest kilka metod otrzymywania śladu współpracy, które podzielono na:

1. **Metoda analityczna** (tylko w przypadku przekładni teoretycznych);
2. **Metody numeryczne** otrzymywane:
  - poprzez rozwiązywanie układu równań styku powierzchni współpracujących (zapisanych w postaci równania parametrycznego lub funkcji interpolowanej),
  - w środowisku CAD (powierzchnie z symulacji bezpośredniej odwzorowania lub zadane dyskretnie) przez wyznaczanie warstwic jednakowych odległości między współpracującymi powierzchniami,
  - za pomocą MES (określenie grubości filmu olejowego - COPEN);
3. **Metody doświadczalne** (rzeczywisty ślad współpracy):
  - bez obciążenia (maszyny kontrolne) - TCA,
  - z obciążeniem (badania stanowiskowe przekładni) - LTCA.

W metodach numerycznych przestrzenną krzywą ograniczającą ślad styku można wyznaczyć geometrycznie, wgłębiając powierzchnie współpracujących zębów na odległość równą odkształceniu sprężystemu przy zadanej sile międzyzębnej. Odległość na jaką wykonuje się wgłębienie może również odpowiadać grubości warstwy tuszu przyjmowanego do sprawdzania styku przekładni na maszynach kontrolnych (testerkach).



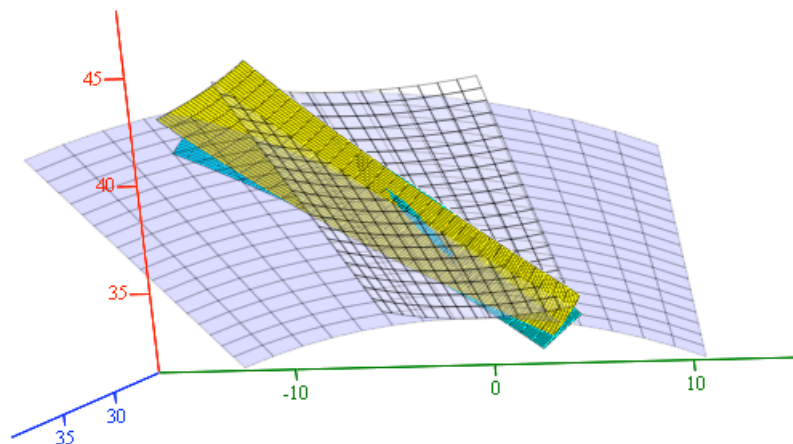
Rys. 2.1. Sprężenie powierzchni bocznych zębów kół walcowych o zębach śrubowych – ślad styku [9]

Metoda analityczna ma zastosowanie w przypadku, gdy analizujemy przekładnie teoretyczne o nieskomplikowanej geometrii np. przekładnia walcowa o zębach prostych lub śrubowych bez modyfikacji powierzchni zęba. W tym przypadku możliwy jest zapis powierzchni bocznych zębów jako równań matematycznych i wyznaczenie teoretycznych śladów styku w postaci linii lub punktu (przekładnie walcowe wchrowate) albo poprzez

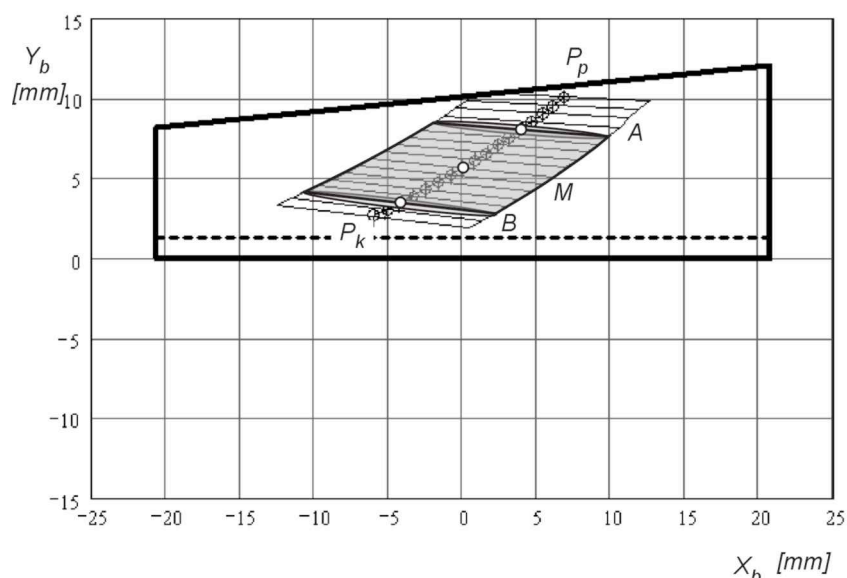
zagłębienie jednej powierzchni w drugą odwzorowującą odkształcenie sprężyste występujące podczas rzeczywistej współpracy [9]. Na rys.2.1. przedstawiono ślad współpracy dla przekładni walcowej o zębach śrubowych.

Metody numeryczne otrzymywania śladu współpracy obejmują przypadki, gdzie powierzchnie boczne zębów współpracujących definiowane są w sposób dyskretny. To znaczy, że powierzchnie boczne zębów określone są na podstawie zbioru punktów otrzymanych jako rozwiązanie numeryczne układu równań nieliniowych precyzujących geometrię powierzchni i warunek zazębienia przekładni technologicznej [7][9] lub jako zbiór mikropowierzchni na modelu bryłowym otrzymanym na drodze symulacji obróbki w systemach CAD [5][6]. Metoda symulacji obróbki polega na odwzorowaniu kinematyki rzeczywistego procesu nacinania na modelu narzędzia i obrabianego koła.

W metodzie numerycznej otrzymywania śladu współpracy, dla której powierzchnie boczne stanowią zbiór punktów, konieczne jest rozpięcie powierzchni na tych punktach z zastosowaniem interpolacji. W przypadku modelu matematycznego przekładni konstrukcyjnej ślad styku stanowi rozwiązanie numeryczne układu równań styku powierzchni współpracujących (zapisanych w postaci równania parametrycznego lub funkcji interpolowanej). Sumaryczny ślad styku to przestrzenna krzywa ograniczająca ślady styku. Na rys. 2.2. przedstawiono przykładowy chwilowy ślad styku, natomiast na rys. 2.3. sumaryczny ślad styku otrzymany przez zrzutowanie na płaszczyznę przekroju osiowego koła chwilowych śladów styku.



Rys. 2.2. Ślad styku dla przekładni stożkowej o kołowej linii zęba



Rys. 2.3. Ślad współpracy na tle uproszczonego zarysu zęba koła [7]

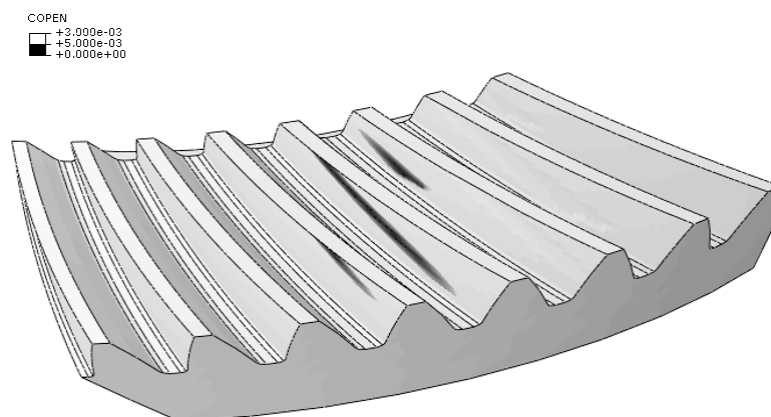


Rys. 2.4. Ślad współpracy uzyskany na modelu bryłowym (Inventor)[5]

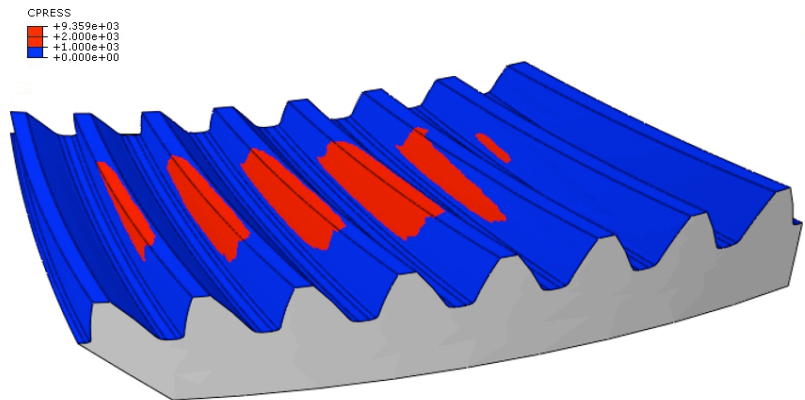
Do otrzymania śladu współpracy w modelu numerycznym przekładni złożonego w środowisku CAD, konieczne jest odpowiednie przygotowanie modeli kół, których powierzchnie boczne powinny być gładkie. Modele te są wykonane metodą hybrydową. Początkowo powierzchnie współpracujące zębów zębniaka i koła zestawione są stycznie, a następnie zębniak obraca się wokół osi o kąt powodujący przenikanie się brył koła i zębniaka. Korzystając z operacji iloczynu brył otrzymuje się chwilowy ślad styku w kolejnych położeniach zazębienia. Chwilowe ślady styku przedstawione w jednym ustalonym położeniu definiują ślad współpracy (rys. 2.4.).

W metodach CAD jak i matematycznych ślad współpracy jest określany dla hipotetycznej absolutnie sztywnej i dokładnej przekładni, pracującej bez obciążenia. Mimo to, na modelu numerycznym przekładni można ocenić i skorygować jakość zazębienia, zapewniając uzyskanie prawidłowego śladu współpracy, bez konieczności fizycznego wykonywania uzębień. Skraca to czas przygotowania produkcji przez eliminację kilkakrotnego korygowania ustawień obrabiarki w oparciu o nacięte i zmierzone koła.

Do metod numerycznych służących do określenia śladu styku i śladu współpracy należy analiza zazębienia z wykorzystaniem MES. W programie Abaqus są gotowe narzędzia w postaci zmiennych: do określania grubości filmu olejowego COPEN (odpowiednik grubości tuszu) oraz CPRESS (czyli ciśnienia na powierzchniach kontaktowych), pozwalającą ustalić, które węzły siatki elementów skończonych użytych do dyskretyzacji modeli pozostają ze sobą w kontakcie. Na rysunku 2.5 zaprezentowano chwilowy ślad styku przygotowany z zastosowaniem funkcji COPEN dla analizy TCA. Rysunek 2.6 przedstawia wyniki śladu współpracy, dla analizy pod obciążeniem roboczym (LTCA).

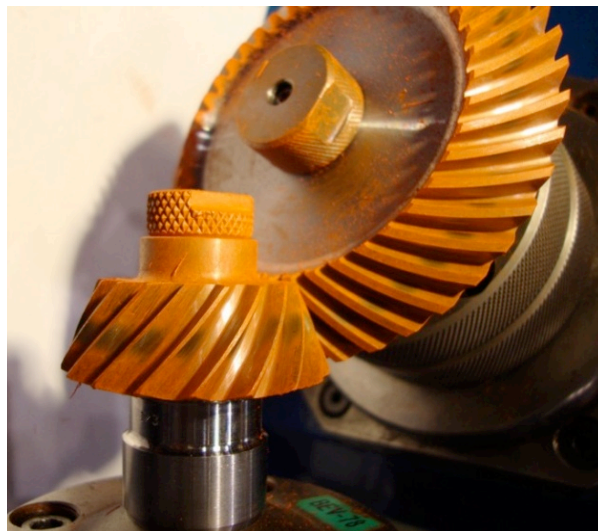


Rys. 2.5. Ślad styku uzyskany bez obciążenia przez symulację współpracy (Abaqus)



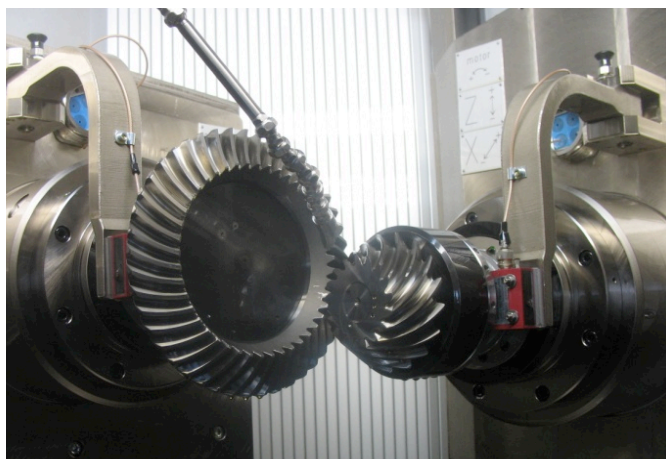
Rys. 2.6. Sumaryczny ślad współpracy pod obciążeniem uzyskany z wykorzystaniem metody MES w programie Abaqus [8]

W trakcie produkcji kół w celu zapewnienia wysokiej jakości przekładni wielokrotnie sprawdza się ślad współpracy na maszynie kontrolnych. Operacja kontroli polega na wprawieniu w ruch obrotowy pod małym obciążeniem zębniaka, którego zęby zostały pokryte specjalnym tuszem, i sprawdzeniu śladów na zębach po przetoczeniu przekładni (rys. 2.7). Dzięki możliwości wprowadzenia zmian położenia kół wg trzech współrzędnych na maszynie kontrolnej możliwe jest znalezienie przyczyn nieprawidłowej współpracy, a nawet ich usunięcie lub sprawdzenie wrażliwości przekładni na błędy montażu. W podobny sposób przeprowadza się analizę śladu współpracy w trakcie montażu przekładni zębatej, której celem jest prawidłowa współpraca przekładni.



Rys. 2.7. Weryfikacja śladu współpracy na maszynie kontrolnej

Najbardziej dokładną metodą określania śladu współpracy jest badanie przekładni pod obciążeniem na stanowisku do badań zmęczeniowych przekładni (rys.2.8). Testując przekładnie przy zadanych warunkach obciążenia oprócz śladu współpracy można uzyskać wiele innych istotnych parametrów pracy pary zębatej.

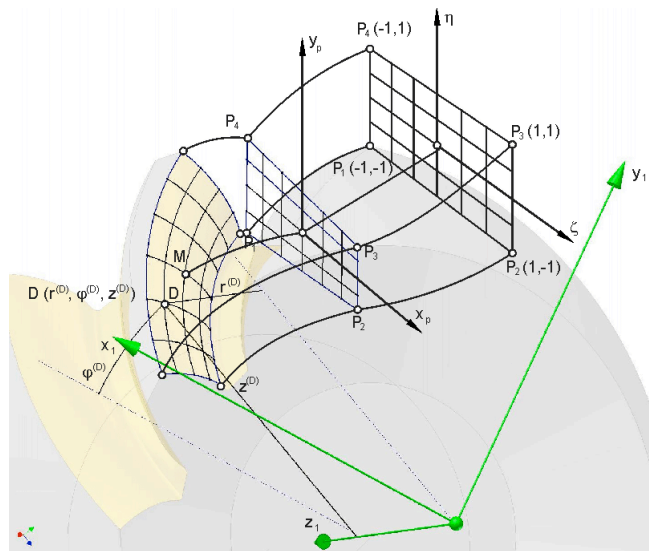


Rys. 2.8. Stanowisko do badań zmęczeniowych przekładni stożkowych TS30, m.in. do wyznaczania rzeczywistego śladu współpracy (Politechnika Rzeszowska, Katedra Konstrukcji Maszyn)

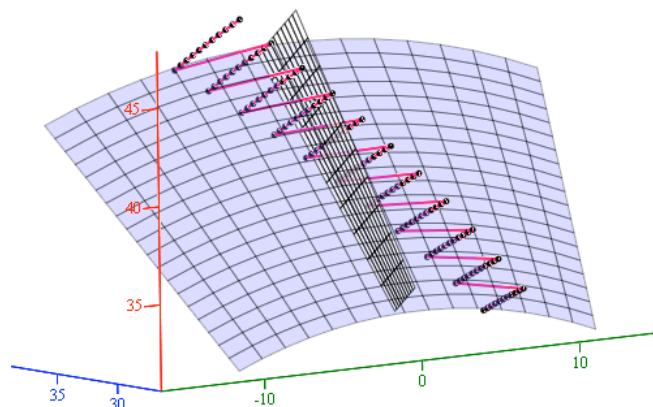
### 3. OTRZYMYWANIE ŚLADU WSPÓŁPRACY PRZEKŁADNI Z WYKORZYSTANIEM MODELOWANIA MATEMATYCZNEGO OBRÓBKİ KÓŁ I PRZEKŁADNI KONSTRUKCYJNEJ ORAZ ANALIZY

Do przeprowadzenia analizy zazębienia konieczne jest wyznaczenie powierzchni współpracujących zębów, które uzyskuje się w wyniku złożonych metod obróbki. W Katedrze Konstrukcji Maszyn Politechniki Rzeszowskiej opracowano metodę modelowania procesu obróbki kół stożkowych z wykorzystaniem modelu matematycznego dyskretnego. Polega ona na odwzorowaniu geometrii i kinematyki procesu obróbki uzębienia za pomocą zależności matematycznych (metoda wektorowo-macierzowa), czyli za pomocą modelu matematycznego nacinania powierzchni bocznej uzębienia. Ze względu na złożoność procesu obróbki uzębienia powierzchnie boczne wklęsłe i wypukłe zębów uzyskuje się jako rozwiązanie numeryczne układu równań nieliniowych w postaci siatki punktów, odpowiadające zadanej siatce odniesienia o określonych wymiarach (rys. 3.1). Współrzędne punktów siatki odpowiadają współrzędnym punktów rozmieszczonych na siatce odniesienia usytuowanej w przekroju osiowym nacinanego koła w granicach czynnej wysokości zęba (rys. 3.2). Dzięki zastosowaniu siatki odniesienia otrzymuje się równomiernie rozmieszczone punkty definiujące powierzchnię. Na uzyskanym zbiorze punktów rozpinana jest powierzchnia przez zastosowanie interpolacji, która posłuży dalszej analizie w modelu matematycznym przekładni konstrukcyjnej.

Na podstawie warunku zazębienia, który mówi o równości współrzędnych odpowiadających sobie punktów styczności w dowolnym układzie współrzędnych  $S_i$  oraz o pokrywaniu się jednostkowych wektorów normalnych, wyznacza się punkty styku rozpoczynając od punktu  $M^{(1)}$  (rys. 3.1) znajdującego się na powierzchni bocznej zębownika powstającego z przecięcia walca tocznego z płaszczyzną przechodzącą przez środek szerokości wieńca koła. Wykorzystując uzyskaną ścieżkę styku wyznacza się chwilowe ślady styku przez zagłębianie się powierzchni bocznej zębownika o stałą dla każdego przypadku wartość stanowiącą założoną grubość warstwy tuszu. Rzutując chwilowe ślady styku w ustalonym położeniu zęba otrzymujemy ślad współpracy, którego wielkość, kształt i położenie podlega ocenie.

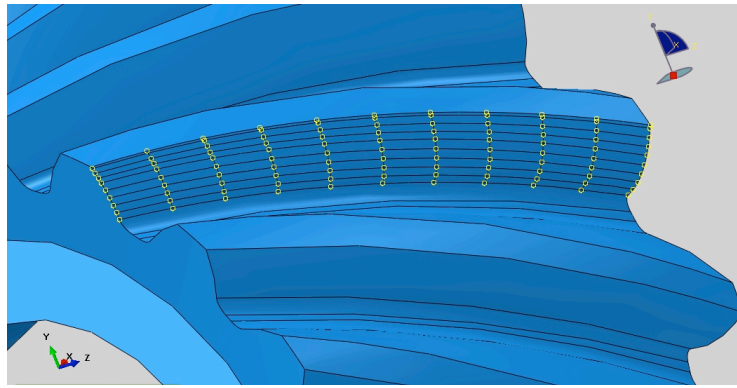


Rys. 3.1. Przekrój osiowy koła wraz z zastosowaną siatką odniesienia



Rys. 3.2. Siatka punktów definiująca powierzchnie boku zęba koła w oparciu o siatkę odniesienia (model matematyczny)

Do przeprowadzenia analizy zazębienia z wykorzystaniem MES konieczne jest wykonanie modeli kół i ich złożenie w przekładnię. Geometria otoczki koła stożkowego jest niezbędna do określenia jego bryły bazowej, natomiast istotny element modelu koła zębatego o kołowo-łukowej linii stanowi powierzchnia wrębu, uzyskana z modelu matematycznego nacinania uzębienia. Zatem na podstawie obliczonych parametrów geometrycznych przekładni i wyznaczonych powierzchni wrębu wykonano i przygotowano modele CAD kół zębatych analizowanej przekładni stożkowej. Modele te posiadały specjalnie zagęszczoną siatkę elementów skończonych w kluczowych dla obliczeń obszarach. Na ich podstawie zostały przeprowadzone obliczenia numeryczne MES przekładni stożkowej w programie Abaqus. Zarówno obrót jak i obciążenie zostały tak zdefiniowane, by zapewnić współpracę kół, z zachowaniem zgodnych z rzeczywistymi warunków pracy. Przebadano współpracę kilku kolejnych par zębów kół przekładni stożkowej. Przy pomocy funkcji COPEN wygenerowano chwilowe i sumaryczne ślady styku, które przedstawiono na rys. 2.5 oraz 2.6. Ocena wizualna uzyskanych śladów jest możliwa, natomiast do oceny ilościowej wykorzystano siatkę odniesienia wprowadzoną dla modelu matematycznego nacinania uzębienia (rys. 3.3).



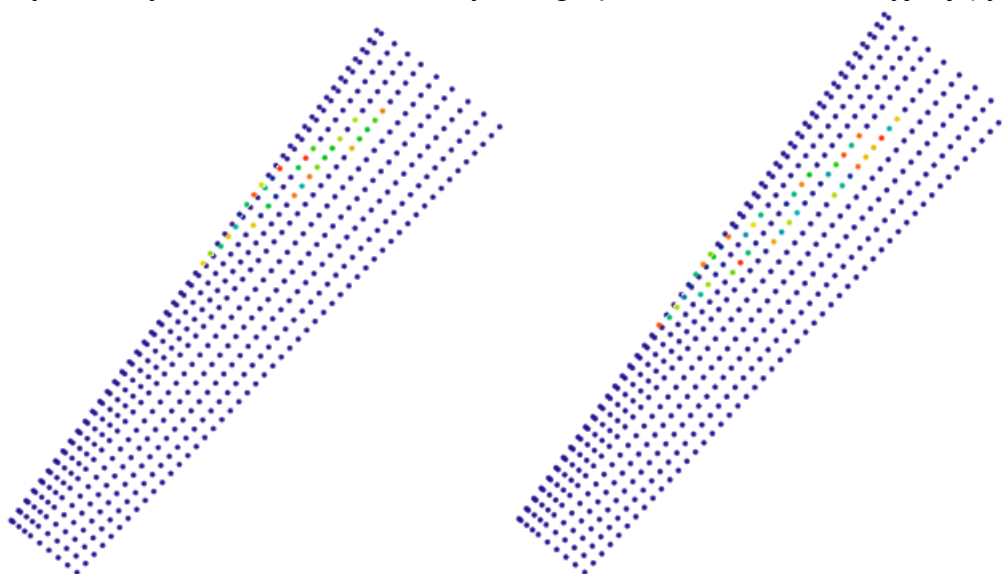
Rys. 3.3. Siatka punktów wprowadzona na powierzchni boku zęba koła z wykorzystaniem siatki odniesienia modelu matematycznego (model do analiz MES)

Wykorzystując dane uzyskane na temat położenia poszczególnych węzłów na powierzchniach bocznych współpracujących zębów, określono wartości odległości współpracujących powierzchni zębów. Ustalono dla odległości określony próg, w tym przypadku 0,02mm. Dla wartości większych przypisywano wartość stałą referencyjną. Na podstawie przedstawionej analizy uzyskano wykresy chwilowych śladów styku i sumarycznego śladu styku.

#### 4. ANALIZA WYNIKÓW

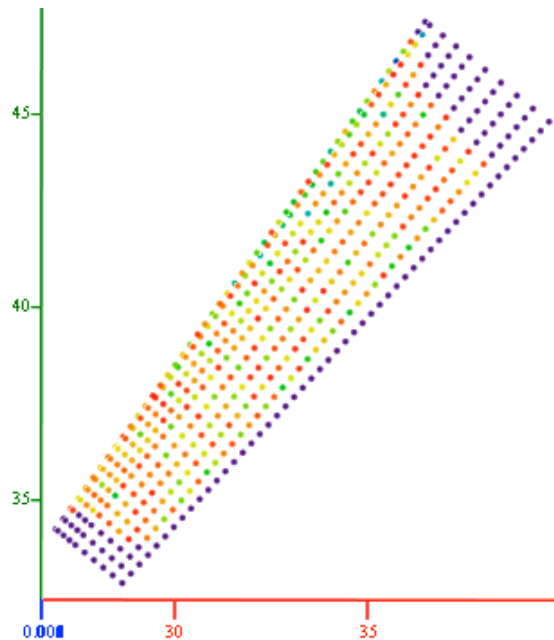
Na podstawie obliczeń technologicznych dla danej geometrii członów przekładni w oparciu o model matematyczny przekładni technologicznej otrzymano powierzchnie boczne koła i zębniaka. Modele numeryczne powierzchni zębów zastosowano do wykonania hybrydowych modeli zębniaka i koła, następnie ustawiano w parze konstrukcyjnej i sprawdzano jakość współpracy kół, której wskaźnikiem jest sumaryczny ślad współpracy.

Na podstawie otrzymanych modeli kół i wyników współpracy przekładni pod obciążeniem z programu Abaqus uzyskano następujące wyniki śladów, które przedstawiono na poniższych wykresach (rys. 4.1, rys. 4.2). Otrzymano również sumaryczny ślad styku z modelu matematycznego przekładni konstrukcyjnej (rys. 4.3).

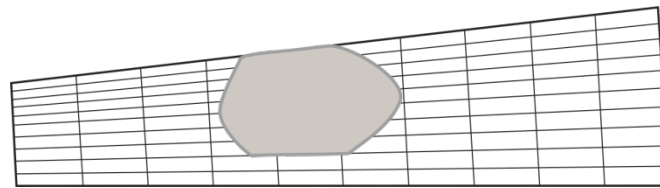


Rys. 4.1. Chwilowe ślady styku uzyskane w kolejnych krokach iteracyjnych





Rys. 4.2. Sumaryczny ślad styku uzyskany z analizy odległości węzłów



Rys. 4.3. Sumaryczny ślad styku uzyskany z modelu matematycznego (TCA)

Przedstawiona metoda otrzymywania śladu współpracy na podstawie analizy przenikania węzłów modeli podczas analizy z obciążeniem jest metodą dokładniejszą niż określenie śladu styku bez obciążenia przekładni. Ślad styku rozszerza się co jest zjawiskiem naturalnym, poza tym przesuwają się delikatnie w kierunku dużych modułów, z powodu ugięcia zęba.

#### 4. WNIOSKI

Na podstawie doświadczenia i przeanalizowanych przypadków, których niewielką część przedstawiono w artykule wyciągnięto następujące wnioski:

1. Wyznaczenie chwilowych śladów współpracy jest niezbędne dla poprawnego zaprojektowania przekładni stożkowej. Ich lokalizacja na boku zęba, rozmiar i trajektoria, po której zmieniają swoje położenie są ważnym wskaźnikiem mówiącym o charakterze pracy projektowanej przekładni stożkowej. Na podstawie kształtu sumarycznego śladu współpracy, konstruktor wyciąga wnioski dotyczące jakości przekładni, dlatego też jest to jedno z ważniejszych zadań w procesie projektowania przekładni stożkowych.
2. W postprocesorze programu Abaqus możliwe jest wyznaczenie sumarycznych śladów współpracy dla modeli obydwu współpracujących kół zębatych.
3. Dzięki zastosowaniu siatki odniesienia, można precyzyjnie porównać wyniki otrzymane na podstawie dwóch metod matematycznej i z zastosowaniem analizy MES. Ta weryfikacja nie jest tylko wizualna, ale dotyczy konkretnych węzłów, których położenie jest znane i można je konkretnie określić w dowolnym położeniu za pomocą współrzędnych punktów charakterystycznych, które odpowiadają węzłom

siatki modelu dyskretnego zarówno na modelu matematycznym numerycznym jak i wirtualnym.

4. Przedstawiona metoda otrzymywania śladu współpracy na podstawie analizy przenikania węzłów modeli podczas analizy z obciążeniem (LTCA) jest metodą dokładniejszą niż określenie śladu styku bez obciążenia przekładni (TCA). Eliminuje błędy wynikające z uginania i skręcania zębów podczas współpracy.

*Badania realizowane w ramach Projektu "Nowoczesne technologie materiałowe stosowane w przemyśle lotniczym", Nr POIG.01.01.02-00-015/08-00 w Programie Operacyjnym Innowacyjna Gospodarka (PO IG). Projekt współfinansowany przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego.*

## LITERATURA

- [1] Dudley D.W.: *Handbook of Practical Gear Design*, CRC Press LLC, 2002
- [2] Artoni A., Bracci A., Gabiccini M., Guiggiani M.: *Optimization of the loaded contact pattern in hypoid gears by automatic topography modification*, Journal of Mechanical Design, 131, 011008, 2009
- [3] Argyris J., Fuentes A., Litvin F.L.: *Computerized integrated approach for design and stress analysis of spiral bevel gears*, Comput Methods Appl Mech Eng, 191 (11–12), 2002, pp. 1057–1095
- [4] Litvin F. L., Fuentes A.: *Gear geometry and applied theory*. Second edition. Cambridge University Press, New York, 2004
- [5] Marciniak A., Pisula J., Płocica M., Sobolewski B.: *Projektowanie przekładni stożkowych z zastosowaniem modelowania matematycznego i symulacji w środowisku CAD*, Mechanik, nr 7/2011, s. 602-605;
- [6] Marciniak A., Sobolewski B.: *Method of spiral bevel gear tooth contact analysis performed in CAD environment*. Aircraft Engineering and Aerospace Technology, Volume 85, Issue 6, 2013, Article number 17097833, pages 467-474;
- [7] Marciniak A.: *Synteza i analiza zazębień przekładni stożkowych o kołowo-łukowej linii zęba*, Rzeszów, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej 2002
- [8] Pacana J., Fudali P.: *Opracowanie aplikacji do analizy współpracy przekładni stożkowej pod obciążeniem roboczym w środowisku MES-Abaqus*, Raport z prac prowadzonych w I i III kwartale 2014 roku. Politechnika Rzeszowska
- [9] Pisula J.: *Matematyczny model geometrii uzębienia i zazębienia kół walcowych kształtowanych obwiedniowo*, Rozprawa doktorska, Rzeszów 2006
- [10] Sobolak M.: *Analiza i synteza współpracy powierzchni kół zębatych metodami dyskretnymi*, Rzeszów, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej 2006