

Metoda oceny jakości utwierdzenia belki wspornikowej

A method of estimation of the semi-beam restraint quality

WALDEMAR MORZUCH*

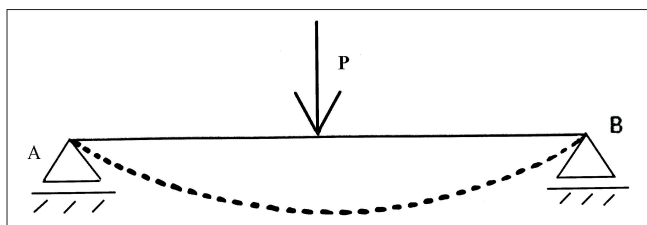
Przedstawiono wykorzystanie metody holografii optycznej do oceny jakości utwierdzenia belki wspornikowej o przekroju kwadratowym. W pomiarach zastosowano jedną z metod holografii optycznej, zwaną metodą podwójnej ekspozycji. W wyniku interferencji wiązki przedmiotowej i wiązki odniesienia na materiale światłoczułym otrzymano obraz prążków interferencyjnych, które posłużyły do określenia linii ugięcia belki. Ocena jakości utwierdzenia przeprowadzono na podstawie pomiaru kąta ugięcia belki w miejscu utwierdzenia oraz bezwymiarowego współczynnika (wprowadzonego przez autora). Omówione rozwiązanie pozwala na oszacowanie sztywności elementów konstrukcyjnych.

SŁOWA KLUCZOWE: holografia optyczna, sztywność, belka wspornikowa

The article presents estimation of the semi-beam restraint quality with use of optical holography. An object of investigations was a beam of square section. The double exposure method of optic holography was used for the measurements. As a result of interference of the reference and the main wave on light sensitive material, an image of interferential striae is obtained, on the basis of which displacements of the beam can be determined. The restraint quality was estimated basing on measurement of a deflection angle at the restraint point and specific nondimensional coefficient introduced by the Author. This solution provides for assessment of structural rigidity of structures.

KEYWORDS: optical holography, rigidity, semi-beam

W konstrukcjach maszyn bardzo często występują elementy, które pracują jak belki, tj. są zginane (rys. 1) – np. korpusy, kadłuby, wsporniki, łożyskowane wały i osie. Również wiele narzędzi (np. noże tokarskie) oraz detali poddawanych obróbce skrawaniem (np. elementy toczone) zachowuje się jak elementy belkowe.



Rys. 1. Element belkowy AB poddany działaniu siły poprzecznej P

Najczęściej przyjmuje się, że w miejscu łożyskowania (w punktach A i B na rys. 1) momenty gnące są równe zeru. Tymczasem w rzeczywistości wartości tych momentów są różne od zera (przykładowo, w łożyskach samonastawnych kąty ugięcia wału w punktach A i B są dowolnie duże) – choć może się zdarzyć, że będą równe zeru – i ma to wpływ na sztywność elementu AB. Pojawia się zatem problem opisu

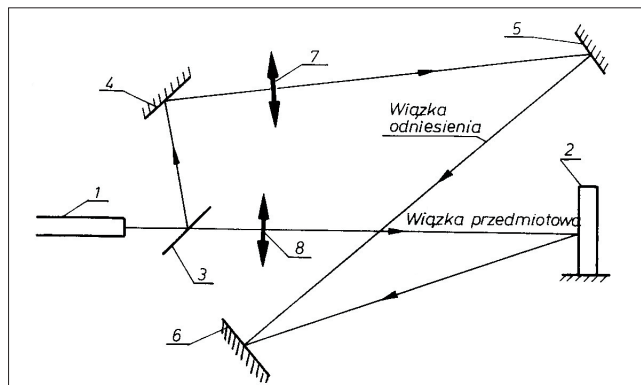
sztywności elementu belkowego zamocowanego w dowolny sposób. Kluczowym zadaniem w fazie konstruowania takiego elementu jest wyznaczenie jego linii ugięcia, przy czym ugięcie nie może przekroczyć wartości maksymalnej.

Podstawą do rozwiązania podobnego zagadnienia jest równanie różniczkowe wiążące ugięcie belki z zadaniem obciążeniem [5]. Zakłada się, że znane są warunki brzegowe, wynikające zwykle z charakteru zamocowania belki (np. koniec swobodny lub utwierdzony).

Przedmiotem dalszych rozważań jest belka wspornikowa, obciążona na swobodnym końcu siłą skupioną. Jak wiadomo z wytrzymałości materiałów, w miejscu utwierdzenia – oczywiście przy założeniu, że mamy do czynienia z utwierdzeniem idealnym – ugięcie i kąt ugięcia są równe zeru [5]. W rzeczywistości te wielkości są różne od zera, co wynika z określonej podatności (która zawsze występuje) utwierdzenia. W związku z tym konieczne stało się przeprowadzenie oceny jakości zamocowania końca belki, które uznaje się za idealne utwierdzenie. Oceny tej dokonano na podstawie holograficznego pomiaru rzeczywistych przemieszczeń badanej belki wspornikowej. Na potrzeby oceny zaproponowano wprowadzenie pewnego bezwymiarowego współczynnika.

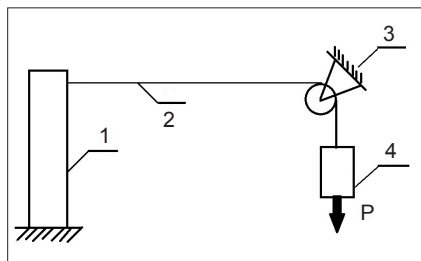
Opis stanowiska badawczego

Schemat stanowiska badawczego przedstawiono na rys. 2 [2÷4]. W badaniach wykorzystano urządzenie ILA 120 firmy Carl Zeiss – laser jonowy, argonowy, emitujący światło zielone o długości fali $\lambda = 514,5$ nm. Układ optyczny składa się (rys. 2) ze zwierciadeł (oznaczonych jako 4 i 5), soczewek (oznaczonych jako 7 i 8) oraz płyty holograficznej (oznaczonej jako 6), a jego zadaniem jest wytworzenie wiązek światła laserowego i ich zarejestrowanie. Badaną belkę wspornikową o przekroju kwadratowym, obciążoną na końcu siłą skupioną (schemat obciążenia belki przedstawiono na rys. 3), umieszczono w szczękach imadła przymocowanego śrubami do stołu holograficznego.



Rys. 2. Schemat stanowiska badawczego: 1 – laser; 2 – badany obiekt (belka wspornikowa); 3 – płyta dzieląca światło; 4 i 5 – zwierciadła; 6 – płyta holograficzna; 7 i 8 – soczewki

* Dr inż. Waldemar Morzuch (waldemar.morzuch@pwr.edu.pl) – Katedra Materiałoznawstwa, Wytrzymałości i Spawalnictwa Politechniki Wrocławskiej



Rys. 3. Schemat obciążenia belki:
1 – badana belka
2 – nić,
3 – bloczek,
4 – ciężarek

Pomiar przemieszczeń poprzecznych belki

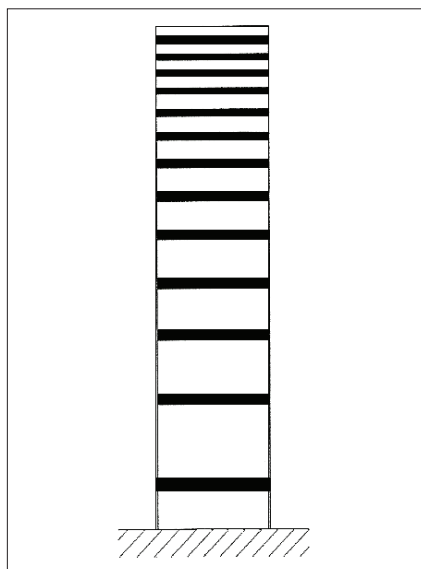
Przemieszczenia poprzeczne belki (ugięcia) mierzono holograficzną metodą dwukrotnej ekspozycji [1, 6]. Polega ona na wykonaniu dwóch naświetleń tej samej płyty holograficznej w dwóch stanach badanego obiektu. Na hologramie zostają zarejestrowane wtedy dwie fale przedmiotowe, rozchodzące się od powierzchni obiektu w czasie kolejnych naświetleń. Oświetlenie tak wykonanego hologramu wiązką odniesienia powoduje rozchodzenie się za hologramem obu zarejestrowanych fal. Fale interferują ze sobą i wytwarzają układ prążków zawierających informację o wzajemnej różnicy między zarejestrowanymi stanami. W rozważanym przypadku pierwsze naświetlenie następowało przy braku obciążenia, natomiast drugie – po obciążeniu belkiadaną siłą. Przemieszczenia poszczególnych punktów belki wyznaczano z następującego wzoru [6]:

$$w = \frac{\lambda}{2} n \quad (1)$$

gdzie: n – numer kolejnego prążka (prążkowi przypisuje się numer o wartości równej zero, gdy występuje na tle punktów, o których wiadomo, że nie uległy przemieszczeniu); λ – długość fali światła spójnego emitowanego przez laser, wynosząca 514,5 nm.

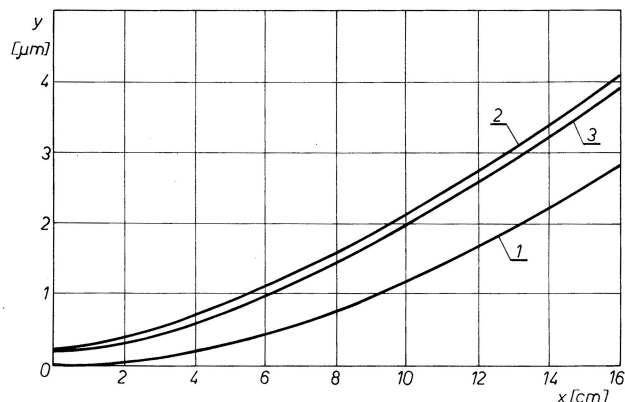
Gdy mamy do czynienia z utwierdzeniem idealnym, prążek zerowy powinien leżeć na belce właśnie w miejscu utwierdzenia, natomiast kolejny prążek powinien mieć rząd równy jedności. W rzeczywistej belce punkty utwierdzenia doznają przemieszczeń i obrotów – w związku z tym rząd prążka występującego na utwierdzeniu jest różny od zera. W dalszej analizie założono, że pierwszy widoczny prążek, leżący na belce w pobliżu szczęk imadła, ma rząd pierwszy.

Z zależności (1) wynika, że przy danym obciążeniu prążki interferencyjne powinny mieć kształt poziomych, równoległych do siebie linii. Prążki interferencyjne przeniesione z odpowiedniej fotografii przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Obraz prążków interferencyjnych

Na podstawie zależności (1) oraz znajomości rzędów poszczególnych prążków i długości światła laserowego wyznaczono rzeczywiste ugięcia belki w funkcji położenia, jakie dany prążek zajmuje na belce (czyli w funkcji współrzędnej x). Określoną w ten sposób linię ugięcia pokazano na rys. 5 (krzywa 2).



Rys. 5. Wykres ugięcia badanej belki: 1 – krzywa teoretyczna, 2 – krzywa doświadczalna, 3 – krzywa ugięcia przy uwzględnieniu niezerowych warunków brzegowych

Dla porównania na rys. 5 przedstawiono również linię ugięcia belki utwierdzonej w sposób idealny (oznaczoną jako 1), która jest opisana zależnością [5]:

$$y = \frac{Pl}{6EJ} x^2 \left(3 - \frac{x}{l} \right) \quad (2)$$

gdzie: E – moduł Younga materiału belki, J – moment bezwładności przekroju poprzecznego belki, l – długość belki, P – siła obciążająca belkę, przyłożona na jej swobodnym końcu.

Z przedstawionych wykresów wynika, że występują duże różnice pomiędzy rozwiązaniem teoretycznym i rzeczywistym. Zmierzone ugięcia są mianowicie o 40–50% większe od ugięć teoretycznych. Aby uzyskać prawidłowe rozwiązanie równania różniczkowego osi ugiętej [5], należy wyznaczyć przemieszczenie i kąt ugięcia belki w przekroju utwierdzonym:

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = -M \quad (3)$$

gdzie M oznacza moment gnący.

W tym celu doświadczalną krzywą ugięcia aproksymowano wielomianem czwartego stopnia:

$$y(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (4)$$

Aproksymację przeprowadzono numerycznie, z wykorzystaniem odpowiedniego programu do mikrokomputera. Po wprowadzeniu wyników pomiarów do pamięci mikrokomputera otrzymano następujące wartości współczynników wielomianu (4):

$$\begin{aligned} a_0 &= 18,55 \cdot 10^{-6} \text{ cm} \\ a_1 &= 5,7735 \cdot 10^{-6} \\ a_2 &= 1,5254 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-1} \\ a_3 &= 61,2966 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{-2} \\ a_4 &= -5,1756 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^{-3} \end{aligned} \quad (5)$$

Współczynnik determinacji R^2 wyniósł 0,83, a błąd standardowy estymacji $1,310^{-6}$ m.

Znajomość analitycznej postaci funkcji ugięcia umożliwia wyznaczenie ugięcia $y(0)$ i kąta ugięcia $y'(0)$ w przekroju utwierdzonym belki:

$$\begin{aligned} y(0) &= a_0 \\ y'(0) &= a_1 \end{aligned} \quad (6)$$

Rozwiązanie równania różniczkowego (3) przy tak sformułowanych warunkach brzegowych ma postać:

$$y = \frac{Plx^2}{6EJ} \left(3 - \frac{x}{l} \right) + Cx + D \quad (7)$$

Stałe całkowania C i D są równe:

$$\begin{aligned} C &= y'(0) \\ D &= y(0) \end{aligned} \quad (8)$$

Dla utwierdzenia idealnego stałe C i D są równe zeru, ponieważ:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Po uwzględnieniu zależności (6) ostatecznie otrzymuje się funkcję:

$$y = \frac{Plx^2}{6EJ} \left(3 - \frac{x}{l} \right) + a_1x + a_0 \quad (10)$$

Jej wykres przedstawiono na rys. 5 (krzywa oznaczona jako 3). Jak widać, funkcja ta stosunkowo dobrze przybliża krzywą 2 otrzymaną z pomiarów.

Ocena jakości utwierdzenia belki

Do oceny jakości utwierdzenia belki zaproponowano wprowadzenie pewnego bezwymiarowego współczynnika, zdefiniowanego jako:

$$\alpha = \frac{S_1}{S_2} \quad (11)$$

gdzie: S_1 – pole pod wykresem ugięcia belki utwierdzonej w sposób idealny, S_2 – pole pod wykresem ugięcia belki rzeczywistej.

Pola S_1 i S_2 można wyrazić zależnościami:

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^l \frac{Plx^2}{6EJ} \left(3 - \frac{x}{l} \right) dx \\ S_2 &= \int_0^l (a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) dx \end{aligned} \quad (12)$$

Po wykonaniu całkowania otrzymuje się:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{Pl^4}{8EJ} \\ S_2 &= \left(\frac{1}{5}a_4l^4 + \frac{1}{4}a_3l^3 + \frac{1}{3}a_2l^2 + \frac{1}{2}a_1l + a_0 \right) l \end{aligned} \quad (13)$$

Do obliczeń przyjęto następujące dane: $P=9,81$ N, $l=0,203$ m, $E=2,06 \cdot 10^5$ MPa, $J=3,2552 \cdot 10^{-8}$ m⁴. Po ich podstawieniu do wzorów (13) otrzymano: $S_1=3,1052 \cdot 10^{-7}$ m², $S_2=4,9114 \cdot 10^{-7}$ m², $\alpha=1,58$.

Gdyby koniec belki był utwierdzony idealnie, współczynnik α przyjąłby wartość równą 1. Podatność utwierdzenia powoduje, że $S_2 > S_1$ oraz $\alpha > 1$. Stąd wniosek, że wartość współczynnika może być miernikiem oceny jakości utwierdzenia. Utwierdzenie jest tym bardziej podatne, im bardziej współczynnik α przekracza wartość 1.

W badanym przypadku współczynnik $\alpha = 1,58$, a więc jest daleki od jedności – tym samym utwierdzenie znacznie odbiega od idealnego. Współczynnik ten wyznaczono dla najczęściej spotykanego obciążenia belki wspornikowej, tj. dla siły skupionej przyłożonej na swobodnym końcu belki. Gdy belka zostanie obciążona w inny sposób (np. obciążeniem ciągłym lub momentem skupionym), współczynnik α będzie miał inną postać, którą należałoby określić w wyniku rozważań analogicznych do przedstawionych w niniejszym artykule.

Podsumowanie

Na podstawie pomiaru holograficznego przeprowadzono ocenę jakości utwierdzenia belki wspornikowej. Najpierw wyznaczono dla niej eksperymentalną krzywą ugięcia, która posłużyła do określenia wartości ugięcia i kąta ugięcia w miejscu utwierdzenia. Te wielkości przyjęto jako rzeczywiste warunki brzegowe, co pozwoliło na wyznaczenie poprawnej postaci linii ugięcia belki. Ocenę jakości utwierdzenia przeprowadzono na podstawie wartości ugięcia w miejscu zamocowania belki, z wykorzystaniem zdefiniowanego przez autora bezwymiarowego współczynnika α . Postępując w podany sposób, można ocenić sztywność wielu elementów konstrukcyjnych, takich jak kadłuby czy wsporniki.

LITERATURA

- Jagoszewski E. „Holografia optyczna obecnie”. Warszawa: PWN, 1986.
- Morzuch W. „Pomiar sztywności skrętnej elementów maszyn przy zastosowaniu interferometrii holograficznej”. *Pomiary Automatyka Kontrola* 8 (2010).
- Morzuch W. „Pomiar przemieszczeń stojanów maszyn elektrycznych przy zastosowaniu interferometrii holograficznej”. *Pomiary Automatyka Kontrola* 11 (2011).
- Morzuch W. „Pomiar przemieszczeń i sił wewnętrznych w płytach kołowych”. *Pomiary Automatyka Kontrola* 11 (2011).
- Niezdziński M., Niezdziński T. „Wytrzymałość materiałów”. Warszawa: PWN, 2009.
- Pluta M. „Holografia optyczna”. Warszawa: PWN, 1982. ■