

Mgr inż. Łukasz BREŃKACZ  
Zakład Dynamiki i Diagnostyki Turbin  
Instytut Maszyn Przepływowych PAN

DOI: 10.17814/mechanik.2015.7.214

## IDENTYFIKACJA WSPÓLCZYNNIKÓW DYNAMICZNYCH ŁOŻYSK Z UWZGLĘDNIENIEM NIEWYWAŻENIA WAŁU

*Streszczenie: W pracy przedstawiono metodę wyznaczania współczynników masy, tłumienia i sztywności układu wirnik-łożyska. Pokazano, jak wpływa niewyważenie wirującego wału na wyznaczanie tych współczynników oraz sposób niwelowania jego wpływu na obliczenia. Metoda obliczania współczynników dynamicznych łożysk jest metodą eksperymentalną. Schemat obliczeń przedstawiony w artykule zweryfikowany został na podstawie modelu numerycznego wirnika wykonanego w programie Samcef Rotors. W artykule przedstawiono również sygnały wymuszenia i odpowiedzi układu użyte do obliczania tych współczynników na podstawie wybranego układu wirującego z dwoma łożyskami. Pokazano ponadto, jak zmienia się błąd obliczania współczynników sztywności, tłumienia oraz masy przy uwzględnieniu niewyważenia w obliczeniach oraz przy niwelowaniu jego wpływu.*

## IDENTIFICATION OF BEARING DYNAMIC COEFFICIENTS WITH CONSIDERATION OF SHAFT UNBALANCE

*Abstract: The article presents a method for determination of the mass, damping and stiffness coefficients of the rotor – bearing system. It was shown how the unbalance of the rotating shaft affects the determination of those coefficients and the method of eliminating its impact on the calculation results. The method of calculating the dynamic coefficients of the bearings is an experimental method. The calculation method presented in the article has been verified on the basis of the numerical model of the rotor prepared using the Samcef Rotors program. The article also presents excitation signals and system response signals used to calculate these coefficients on the basis of the rotating system with two bearings. It is also shown what are errors of calculating stiffness, damping and mass coefficients with taking into account unbalance and after elimination of their influence.*

*Słowa kluczowe: współczynniki sztywności, tłumienia i masy, niewyważenie wału*

*Keywords: coefficients of stiffness, damping and mass, unbalance of a shaft*

### 1. WPROWADZENIE

Współczynniki dynamiczne łożysk używane są do wyznaczania dynamiki układów wirujących. Ze względu na trudności przy numerycznym wyznaczaniu współczynników sztywności i tłumienia łożysk, stosowane są metody eksperymentalne. W artykule opisana

została metoda wymuszenia impulsowego. W pracy [1] Qiu i Tieu przedstawili metodę obliczania 16 współczynników sztywności i tłumienia dwóch różnych łożysk hydrodynamicznych. W pracy tej opisywana jest metoda z algorytmem rozbudowanym dodatkowo o możliwość wyznaczania współczynników masy. Współczynniki te określają masę części wału biorącej udział w drganiach. Można na ich podstawie oszacować masę wirującego wału. Obliczenia wykonywane są w dziedzinie częstotliwości. Metoda wymuszenia impulsowego stosowana jest do wyznaczania współczynników łożysk hydrodynamicznych, aerodynamicznych oraz foliowych [2-5].

## 2. SCHEMAT OBLICZEŃ

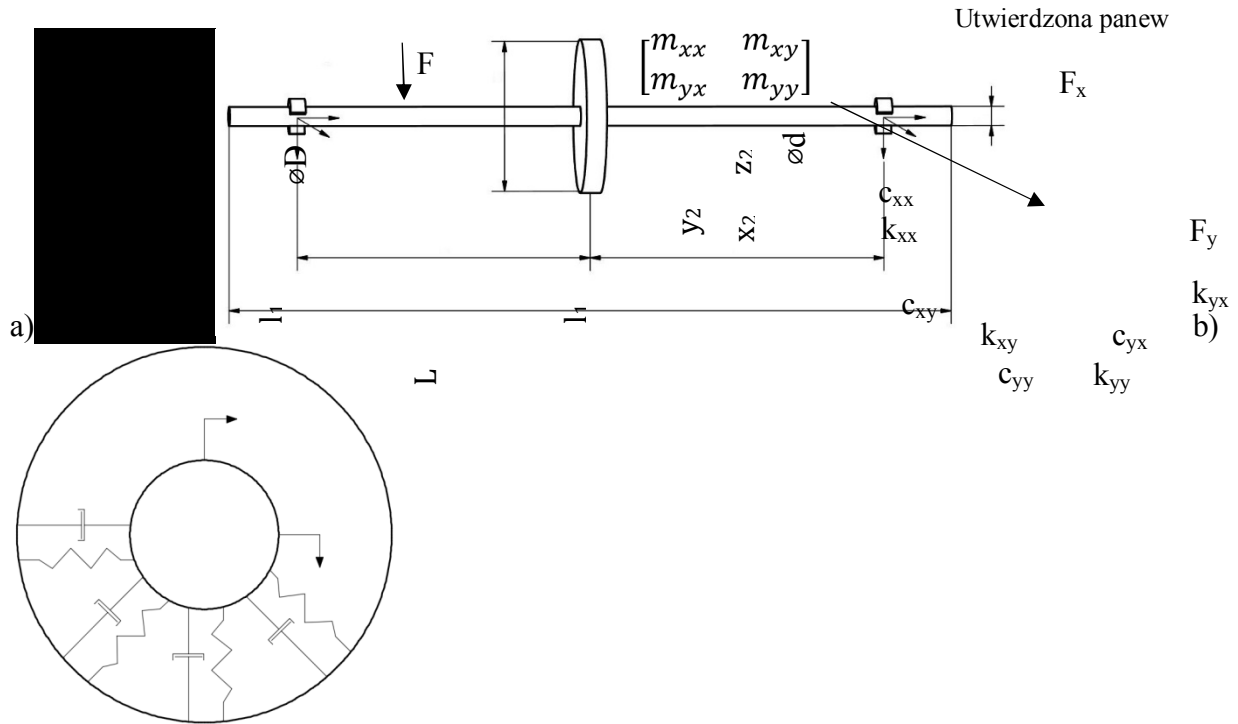
Obliczenia przedstawione w artykule przygotowane zostały dla układu złożonego z wirnika i dwóch łożysk (rys. 1a). Na rysunku 1b przedstawiono model jednego łożyska. Podczas badań eksperymentalnych, na podstawie których wyznaczane są współczynniki sztywności, tłumienia i masy układu wirnik-łożyska, konieczne jest dwukrotne wymuszenie. Pierwszy raz należy wymusić wirnik w kierunku X za pomocą młotka modalnego w jego środkowej części za pomocą siły  $F_X$ , następnie drgania układu muszą zostać ustabilizowane. W drugim kroku należy wymusić układ w kierunku Y (prostopadłym do kierunku X) za pomocą siły wymuszającej  $F_Y$ , również po tym kroku układ musi powrócić do swojej stabilnej pracy. Znając wartość sygnału siły wymuszającej oraz odpowiedzi układu w miejscu łożysk, można obliczyć współczynniki tłumienia, sztywności oraz masy układu wirującego.

Obliczenia współczynników masy, sztywności oraz tłumienia układu wirnik-łożyska przeprowadzono na podstawie modelu stworzonego w programie Samcef Rotors (rys. 1a). Symetryczny model wirnika umieszczony został na dwóch łożyskach. Długość wirnika wynosi  $L = 0,92$  [m]. Rozstaw pomiędzy łożyskami to  $2 \cdot l_1 = 0,58$  [m]. Średnica wału wirnika wynosi  $d = 19,05$  [mm]. Na środku wirnika znajduje się dysk o średnicy  $D = 152,4$  [mm]. Materiał wirnika to stal o module Younga  $E = 205 \cdot 10^9$  [Pa], Liczba Poissona wynosi  $\mu = 0,3$ , gęstość materiału  $\rho = 7800$  [kg/m<sup>3</sup>].

Jako parametry łożysk przyjęto wartości sztywności i tłumienia w kierunkach głównych  $xx$ ,  $yy$  oraz skośnych  $xy$  i  $yx$ . Zestawienie dla dwóch łożysk podano w tabeli 1. Jest to standardowy sposób modelowania łożysk podczas obliczeń dynamicznych. Wykorzystanie modelu numerycznego, w którym znane są współczynniki sztywności oraz tłumienia łożysk, umożliwi określenie błęd pomiarowego oraz wrażliwości metody obliczeń. Indeks 1 lub 2 oznacza kolejno pierwsze i drugie łożysko. Zapis  $K_{xy}^1$  oznacza, że jest to współczynnik sztywności pierwszego łożyska obliczony na podstawie sygnału odpowiedzi układu w kierunku X po wymuszeniu układu w kierunku Y.

Tabela 1. Wartości współczynników sztywności i tłumienia

Współczynniki sztywności	$k_{xx}^1$	$k_{yy}^1$	$k_{xy}^1$	$k_{yx}^1$	$k_{xx}^2$	$k_{yy}^2$	$k_{xy}^2$	$k_{yx}^2$
Wartości wsp. sztywności [N/m]	500 000	450 000	250 000	240 000	550 000	470 000	270 000	260 000
Współczynniki tłumienia	$c_{xx}^1$	$c_{yy}^1$	$c_{xy}^1$	$c_{yx}^1$	$c_{xx}^2$	$c_{yy}^2$	$c_{xy}^2$	$c_{yx}^2$
Wartości wsp. tłumienia [N/(m/s)]	500	550	250	260	550	560	260	270



Rys. 1. a) Model wirnika przygotowany w programie Samcef Rotors, b) model jednego łożyska

### 2.1. Algorytm

Współczynniki dynamiczne łożysk obliczyć można za pomocą metody najmniejszych kwadratów (1). W celu ich wyznaczenia konieczne jest zbudowanie macierzy A oraz I, które przedstawione zostały za pomocą równań (2)-(3). W skład macierzy A wchodzi wektory podatności dla sygnału odpowiedzi z pierwszego i drugiego łożyska ( $F_i^1, F_i^2$ ) oraz wektory częstotliwości ( $\omega_i$ ). W algorytmie do wyznaczania współczynników dynamicznych łożysk wykorzystywany jest sygnał w dziedzinie częstotliwości. Konieczna w związku z tym jest szybka transformata Fouriera sygnału (FFT).

$$Z = (A_i^T A_i)^{-1} A_i^T I_i \tag{1}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} \text{Real}[F_i^1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -(\omega_i)^2 & 0 & 0 & 0 & \omega_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -(\omega_i)^2 & 0 & 0 & 0 & \omega_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{Real}[F_i^2] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -(\omega_i)^2 & 0 & 0 & 0 & \omega_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -(\omega_i)^2 & 0 & 0 & 0 & \omega_i \end{bmatrix} \\ \text{Imag}[F_i^1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -(\omega_i)^2 & 0 & 0 & 0 & \omega_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -(\omega_i)^2 & 0 & 0 & 0 & \omega_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{Imag}[F_i^2] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -(\omega_i)^2 & 0 & 0 & 0 & \omega_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -(\omega_i)^2 & 0 & 0 & 0 & \omega_i \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{2}$$

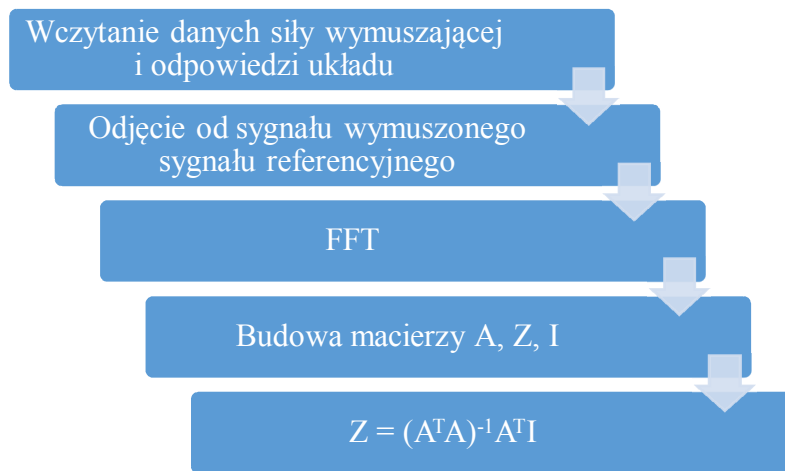
$$I_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3}$$

Kolejność współczynników tłumienia, masy i sztywności dla dwóch łożysk w wirniku przedstawiono w równaniu (4).

$$Z = \begin{bmatrix} k_{xx}^1 & k_{xy}^1 & k_{xy}^2 & k_{xy}^2 & m_{xx}^1 & m_{xy}^1 & m_{xx}^2 & m_{xy}^2 & c_{xx}^1 & c_{xy}^1 & c_{xx}^2 & c_{xy}^2 \\ k_{yx}^1 & k_{yy}^1 & k_{yx}^2 & k_{yy}^2 & m_{yx}^1 & m_{yy}^1 & m_{yx}^2 & m_{yy}^2 & c_{yx}^1 & c_{yy}^1 & c_{yx}^2 & c_{yy}^2 \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

## 2.2. Sposób uwzględnienia niewyważenia

Odpowiedź układu po wymuszeniu (sygnał przemieszczeń w łożyskach) składa się z dwóch części. Pierwsza część związana jest z reakcją na siłę wymuszającą. Druga część związana jest z występowaniem stałej prędkości obrotowej i niewyważenia resztkowego. W celu poprawnego obliczenia współczynników dynamicznych łożysk konieczne jest odjęcie od sygnału odpowiedzi układu tej drugiej części – związanej z niewyważeniem resztkowym. Schemat obliczeń przedstawiono na rysunku 2.

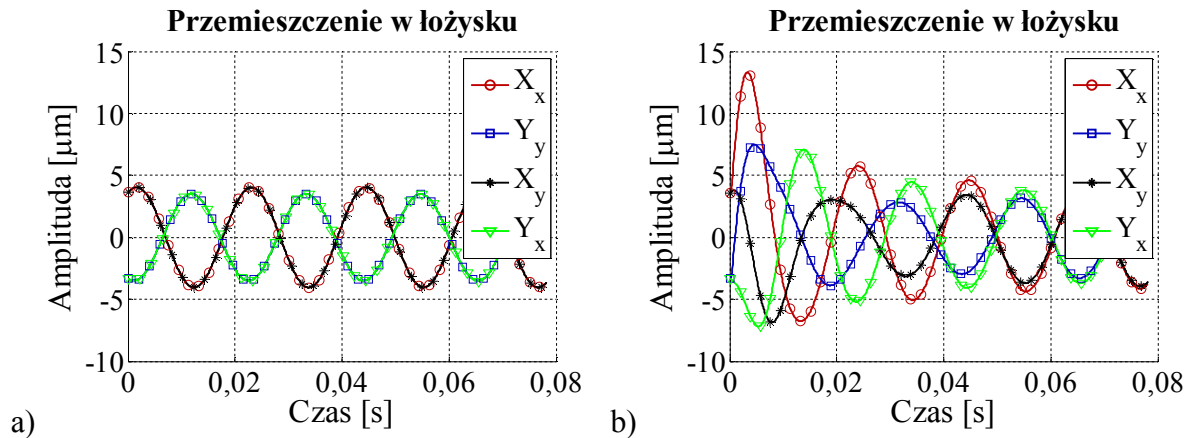


Rys. 2. Schemat obliczeń współczynników dynamicznych łożysk z uwzględnieniem niewyważenia

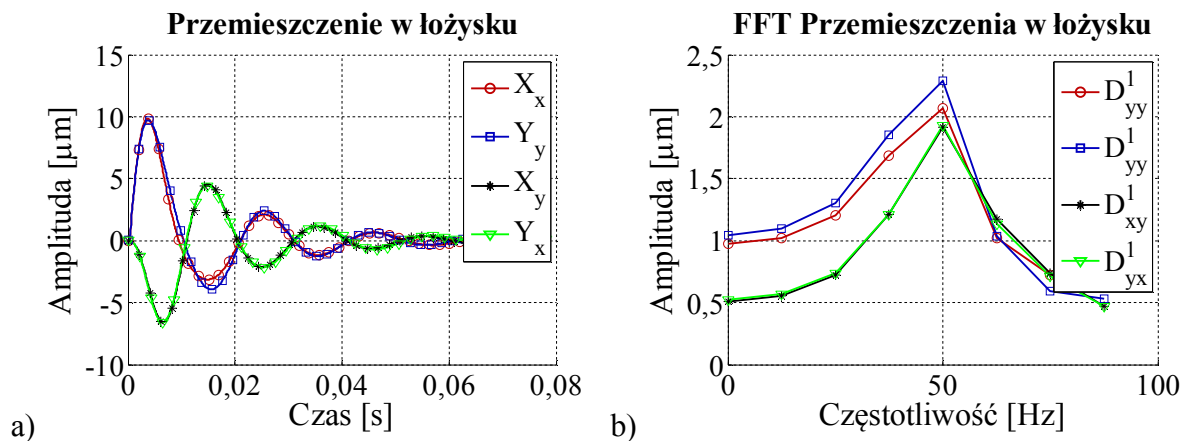
Niewyważenie przyjęte w modelu numerycznym to 1 [g] na promieniu 10 [mm]. Niewyważenie takie jest maksymalnym dopuszczalnym niewyważeniem według normy ISO 1940-1 dla wirnika o masie 4,844 [kg] wyważonego o klasie dokładności G 6,3 i pracującego przy prędkości obrotowej do 10 000 [obr/min].

Stabilna praca wirnika obracającego się z prędkością 2800 [obr/min] przedstawiona została na rysunku 3a. Jest to odpowiedź układu podczas stabilnej pracy mierzona w miejscu łożysk – sygnał referencyjny. Na rysunku 3b przedstawiono sygnał odpowiedzi układu po działaniu siły wymuszającej. Na rysunku tym widoczne jest zwiększenie amplitudy drgań wywołane siłą wymuszającą i następną stabilizacją drgań.

Sygnał po odjęciu od sygnału po wymuszeniu sygnału referencyjnego przedstawiono na rysunku 4a. Dalsze obliczenia współczynników sztywności, tłumienia oraz masy należy przeprowadzić z wykorzystaniem jako odpowiedzi układu właśnie tego sygnału. Sygnał ten po zastosowaniu Szybkiej Transformaty Fouriera przedstawiony został na rysunku 4b.

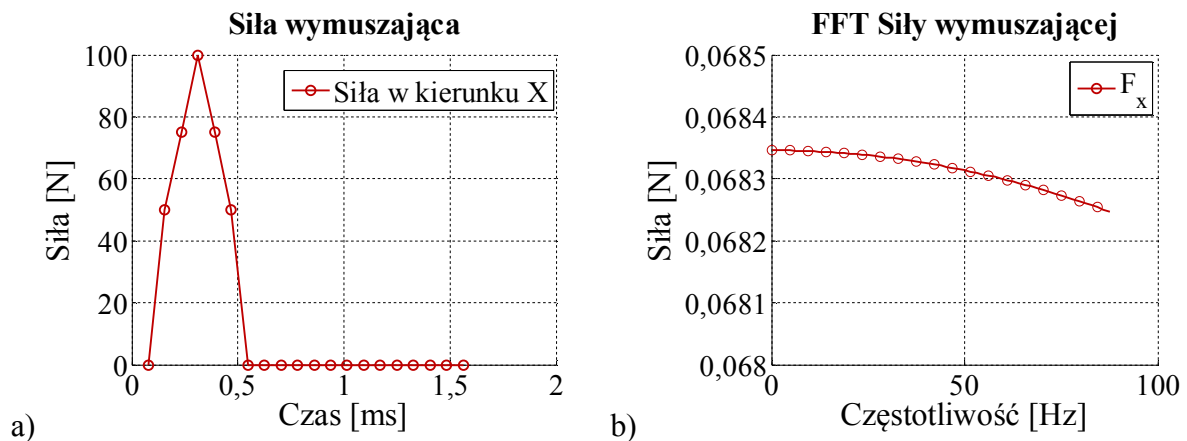


Rys. 3. a) Stabilna praca wirnika – sygnał referencyjny w łożysku, b) amplituda drgań po wymuszeniu wirnika za pomocą młotka modalnego – sygnał w łożysku



Rys. 4. a) Amplituda drań po odjęciu od sygnału z wymuszeniem sygnału referencyjnego, b) FFT tego sygnału

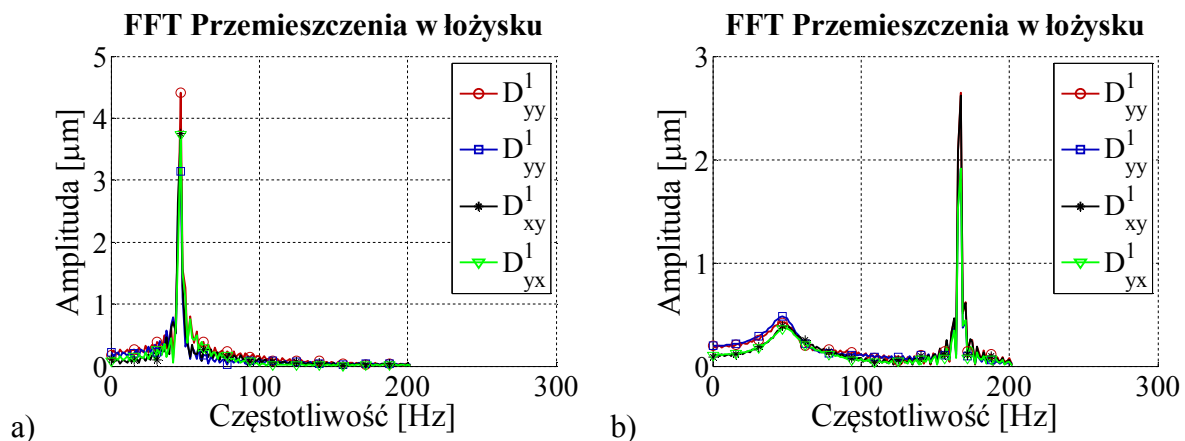
Siła wymuszająca użyta do wymuszenia układu w jego środkowej części przedstawiona została na rys. 5. W dwóch prostopadłych kierunkach wykorzystano taką samą wartość siły  $F_x, F_y = [0, 50, 75, 100, 75, 50, 0]$  [N]. W programie Samcef Rotors wykonana została analiza w dziedzinie czasu, gdzie krok czasowy to  $1/12800$  [s]. Wykres siły wymuszającej w dziedzinie częstotliwości przedstawiono na rysunku 5b.



Rys. 5. Siła wymuszająca: a) w dziedzinie czasu, b) w dziedzinie częstotliwości

### 2.3. Zakres identyfikacji

Do wyznaczenia współczynników masy, sztywności i tłumienia układu wirnik-łożyska konieczny jest odpowiedni zakres identyfikacji. Jest to zakres częstotliwości wykorzystywany w algorytmie do obliczeń. W idealnym przypadku wystarczy kilka pierwszych częstotliwości, jednak w praktyce eksperymentalnej rozszerza się ten zakres na cały przedział rezonansowy, w badaniach eksperymentalnych zapewnia to lepszą powtarzalność wyników [1]. Jeżeli składowa pochodząca od prędkości obrotowej znajduje się poza zakresem prędkości rezonansowych jako zakres identyfikacji, można przyjąć krótszy przedział. Na rysunku 6 przedstawiono wykres FFT odpowiedzi układu w miejscu łożysk dla dwóch prędkości obrotowych wirnika: 2800 [obr/min] oraz 10 000 [obr/min]. Zakres częstotliwości używanej do identyfikacji współczynników dynamicznych łożysk bez prędkości obrotowej to ok. 85 Hz. Analizując dwa poniższe wykresy, można stwierdzić, że w pierwszym przypadku składowa prędkości obrotowej znajduje się w zakresie identyfikacji, w drugim przypadku znajduje się ona poza tym zakresem. Wyniki obliczeń w pierwszym przypadku, bez usunięcia składowej związanej z prędkością obrotową obarczone są błędem wynoszącym ok. 300 procent, a więc w praktyce nie mogą zostać wykorzystane. W drugim przypadku, jeżeli zakres identyfikacji nie będzie obejmował prędkości obrotowej (znajduje się ona poza zakresem identyfikacji), błąd ten wynosi do ok. 6 procent, zazwyczaj jest to ok. 3 procent.



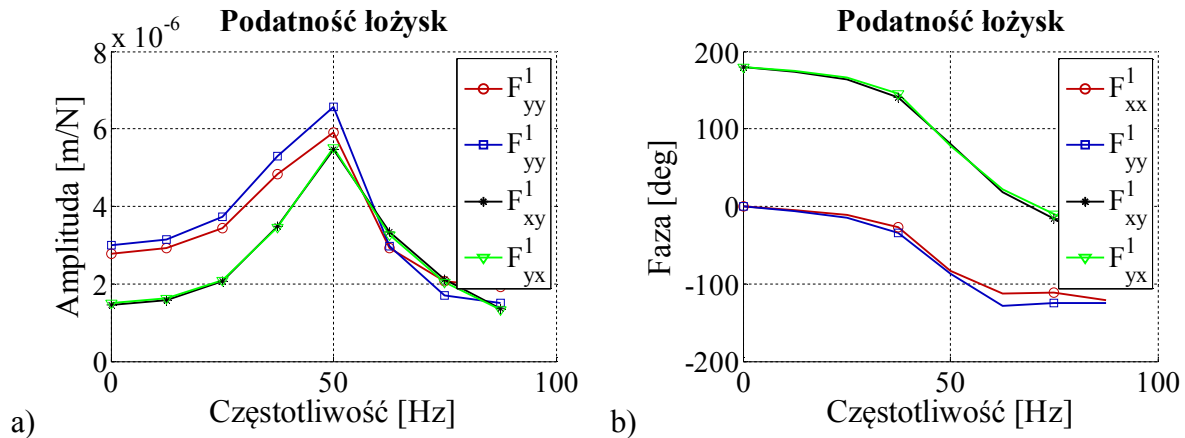
Rys. 6. FFT sygnału przemieszczenia w łożyskach dla prędkości obrotowej:  
a) 2800 [obr/min], b) 10 000 [obr/min]

### 3. WYNIKI

W analizowanym przypadku wykorzystano 1000 próbek z sygnału czasowego. Po analizie FFT wykorzystano 8 kolejnych częstotliwości. Jeżeli przyjmiemy, że parametry łożysk wyznaczamy dla 8 wartości częstotliwości (decyduje o tym indeks  $i$ ), macierz  $A$  będzie miała wymiary  $64 \times 12$ , macierz  $I$   $64 \times 2$ , natomiast macierz  $Z$   $2 \times 12$ .

W celu obliczenia współczynników sztywności, tłumienia i masy układu wirnik-łożyska konieczne jest wyznaczenie podatności. Otrzymuje się ją poprzez pomnożenie sygnału siły wymuszającej i odpowiedzi układu w dziedzinie częstotliwości. Wykres amplitudy i fazy podatności przedstawiony został na rysunku 7. Obliczenia przeprowadzono dla prędkości obrotowej 2800 [obr/min], po usunięciu składowej stałej sygnału pochodzącej od niewyważenia (opierając się na danych z rys. 4 i 5). Dla obliczeń współczynników sztywności i masy na podstawie tak przygotowanych danych błąd nie przekracza jednego procenta, błąd jest nieco większy dla współczynników tłumienia i wynosi do ok. 2 procent.





Rys. 7. Podatność dynamiczna łożysk: a) przebieg amplitudy, b) przebieg kąta fazowego

#### 4. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

W artykule przedstawiono metodę wyznaczania 24 współczynników masy, tłumienia i sztywności układu wirnik-łożyska. Po zsumowaniu współczynników masy obliczyć można masę wirującego wału. Weryfikacja zaproponowanej metody wykonana została za pomocą modelu numerycznego zbudowanego w programie Samcef Rotors.

W ramach pracy przedstawiono błąd pomiarowy związany z wyznaczaniem współczynników dynamicznych łożysk z uwzględnieniem niewyważenia. W celu otrzymania poprawnych wyników konieczne jest odjęcie od sygnału odpowiedzi układu składowej stałej, związanej z niewyważeniem resztkowym. Jeżeli składowa sygnału pochodząca od prędkości obrotowej w dziedzinie częstotliwości jest poza zakresem identyfikacji (zakresem rezonansowym), istnieje możliwość uwzględnienia krótszego przedziału identyfikacji sygnału – bez częstotliwości związanych z prędkością obrotową. Na podstawie rozpatrywanego modelu można stwierdzić, że podejście takie skutkuje błędem obliczeń współczynników dynamicznych łożysk nie przekraczającym zazwyczaj 3 procent. Drugim sposobem niwelowania wpływu niewyważenia resztkowego na wyniki jest odjęcie od sygnału po wymuszeniu, składowej stałej generowanej przez niewyważenie wirnika. Zabieg taki sprawia, że błąd obliczania współczynników sztywności i masy układu wirnik-łożyska nie przekracza na ogół 1 procenta oraz współczynników tłumienia 2 procent. W przypadku gdy składowa sygnału pochodząca od prędkości obrotowej znajduje się w zakresie identyfikacji, konieczne jest jej odjęcie, w przeciwnym wypadku skutkuje to powstaniem dużego błędu obliczeń sięgającego kilkuset procent.

#### LITERATURA

- [1] Nordman R., Schollhorn K.: *Identification of stiffness and damping coefficients of journal bearings by impact method*, 2nd Int. Conf. on Vibrations in Rotating Machinery, Paper C285/80. Inst. Mech. Eng., 1980, pp. 231-238.
- [2] Yu Ping Wang, Daejong Kim: *Experimental Identification of Force Coefficients of Large Hybrid Air Foil Bearings*, Gas Turbines Power, 136(3), 032503, Nov. 27, 2013.
- [3] Uichiro Nishio a, Kei Somayab, Shigeka Yoshimoto, *Numerical calculation and experimental verification of static and dynamic characteristics of aerostatic thrust bearings with small feedholes*, Tribology International, 44, 2011, pp. 1790-1795.

- [4] Xiuli Zhang, Zhongwei Yin n, Gengyuan Gao, Zheng Li State: *Determination of stiffness coefficients of hydrodynamic water-lubricated plain journal bearings*, Tribology International, 85, 2015, pp. 37-47.
- [5] Tiwari R., Chougale A.: *Identification of bearing dynamic parameters and unbalance states in a flexible rotor system fully levitated on active magnetic bearings*, Mechatronics, 24, 2014, pp. 274-286.