

MODELOWANIE TRAJEKTORII LOTU RAKIETY BALISTYCZNEJ W CENTRALNYM POLU GRAWITACYJNYM

Streszczenie: W artykule zaprezentowano model symulacyjny lotu rakiety balistycznej w centralnym polu grawitacyjnym, uwzględniający fazy: startową, środkową i terminalną, jak również zmiany trajektorii spowodowane oddziaływaniem atmosfery oraz występowaniem siły odśrodkowej i Coriolisa. Przedstawiono wybrane wyniki symulacji oraz przykładowe możliwości zastosowania opracowanego modelu do dalszych badań.

MODELING OF BALLISTIC MISSILE FLIGHT TRAJECTORY IN A CENTRAL GRAVITATIONAL FIELD

Abstract: The paper addresses the problem of modeling the ballistic missile flight in a central gravitational field. The problem is formulated with regard to the boost, midcourse and terminal phases of flight and to the changes in the trajectory due to interaction of the atmosphere, centrifugal and Coriolis forces. Selected examples of simulation results are presented and the applicability of the model for further research is considered.

Słowa kluczowe: rakiety balistyczne, trajektorie kinematyczne
Keywords: ballistic missiles, kinematic trajectories

A workable ICBM is an impossibility.
– Vannevar Bush, doradca naukowy
prezydenta Roosevelta (1945)

1. WPROWADZENIE

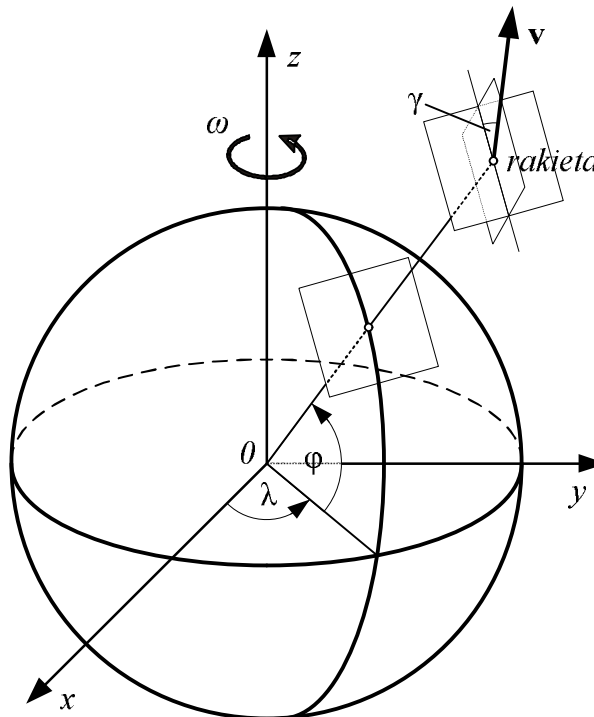
Problem modelowania trajektorii lotu rakiet balistycznych jest w wielu przypadkach sprowadzany do zagadnienia dwuwymiarowego i rozpatrywany w inercjalnym układzie odniesienia. Podejście takie, dopuszczalne dla obliczeń zgrubnych lub odnoszących się do rakiet taktycznych o niewielkim zasięgu, jest niewystarczające w przypadku symulacji numerycznych realizowanych na potrzeby systemów obrony powietrznej (przeciwraкетowej). Nie uwzględnia ono bowiem czynników istotnie wpływających na ruch rakiet balistycznych w przestrzeni, tj. kierunku działania linii sił centralnego pola grawitacyjnego, krzywizny Ziemi czy obecności sił pozornych, co z kolei w sposób znaczący wpływa na zagadnienia związane z modelowaniem systemów śledzenia i predykcji trajektorii [1, 3, 4].

W artykule przedstawiono model matematyczny lotu rakiety balistycznej w centralnym polu grawitacyjnym, opracowany z wykorzystaniem notacji macierzowej. Podejście takie jest użyteczne z punktu widzenia implementacji równań w językach skryptowych popularnych

pakietów wspomagania obliczeń inżynierskich, takich jak MathWorks™ MATLAB®, Scilab czy GNU Octave. Model uwzględnia trzy charakterystyczne dla raket balistycznych fazy lotu: startową (ang. *boost phase*), środkową (ang. *midcourse phase*) i terminalną (ang. *terminal phase*) oraz wpływ oddziaływania atmosfery i sił pozornych na ruch rakiet w przestrzeni.

2. MODEL LOTU RAKIETY BALISTYCZNEJ W CENTRALNYM POLU GRAWITACYJNYM

Obliczenia trajektorii lotu rakiety balistycznej prowadzone są w kartezjańskim układzie współrzędnych, przedstawionym na rys. 1. Początek tego układu pokrywa się ze środkiem Ziemi, oś z skierowana jest do góry i przechodzi przez biegun północny, zaś osie x i y są prostopadłe względem siebie i leżą w płaszczyźnie równika, przy czym x przechodzi przez południk 0° (Greenwich). Przyjęty układ odniesienia jest układem nieinercyjnym, obraca się z prędkością kątową ω względem osi z , co implikuje konieczność uwzględnienia w rozważaniach sił: odśrodkowej i Coriolisa. Na potrzeby obliczeń zakłada się ponadto, że powierzchnia planety jest idealną sferą, zaś Ziemia charakteryzuje się następującymi parametrami fizycznymi: promieniem $R = 6,37 \cdot 10^6$ m, masą $M = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg i prędkością obrotową $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5}$ rad/s. Wartość stałej grawitacyjnej wynosi $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m³/kg·s.



Rys. 1. Przyjęty układ odniesienia i podstawowe zależności kątowe

Na potrzeby symulacji przyjęto uproszczony model rakiety balistycznej, która w rozpatrywanym przypadku traktowana jest jako punkt materialny o trzech stopniach swobody (stopnie swobody związane z obrotami w przestrzeni zaniebuję się). W takim ujęciu przyspieszenie działające na raketę balistyczną podczas lotu można przedstawić w postaci sumy [1, 2, 4]:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_D + \mathbf{a}_G + \mathbf{a}_A \quad (1)$$

gdzie: \mathbf{r} – wektor położenia rakiety balistycznej,
 \mathbf{v} – wektor prędkości rakiety balistycznej,
 \mathbf{a}_T – wektor przyspieszenia związany z ciągiem silnika raketowego,
 \mathbf{a}_C – wektor przyspieszenia sterującego,
 \mathbf{a}_D – wektor przyspieszenia związany z oporem atmosfery,
 \mathbf{a}_G – wektor przyspieszenia grawitacyjnego,
 \mathbf{a}_A – wektor przyspieszenia pozornego (odśrodkowego i Coriolisa).

Na raketę balistyczną przemieszczającą się w dolnych warstwach atmosfery (poniżej umownej granicy 100 km) działa siła oporu powietrza. Związane z nią przyspieszenie można wyrazić zależnością:

$$\mathbf{a}_D = - \frac{\rho_0 e^{-kh} c_D S}{2 \left(m_0 - \int_0^{t_b} \dot{m}_f dt \right) g} \|\mathbf{v}\| \mathbf{v} \quad (2)$$

gdzie: $\rho_0 = 1,22 \text{ kg/m}^3$ – gęstość atmosfery na wysokości 0 m n.p.m.,
 $k = 0,14141 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ – współczynnik,
 h – wysokość lotu rakiety balistycznej,
 c_D – współczynnik oporu aerodynamicznego kadłuba,
 S – powierzchnia charakterystyczna,
 m_0 – masa startowa rakiety,
 \dot{m}_f – wydatek masy paliwa,
 t_b – czas pracy silnika raketowego,
 g – przyspieszenie ziemskie.

Przyspieszenie grawitacyjne rakiety przebywającej w polu centralnym opisuje równanie:

$$\mathbf{a}_G = - \frac{GM\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} \quad (3)$$

zaś jej przyspieszenie pozorne:

$$\mathbf{a}_A = -2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (4)$$

Wektor przyspieszenia od siły ciągu zdefiniowano jako:

$$\mathbf{a}_T = \frac{T}{\left(m_0 - \int_0^{t_b} \dot{m}_f dt \right) \|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} \quad (5)$$

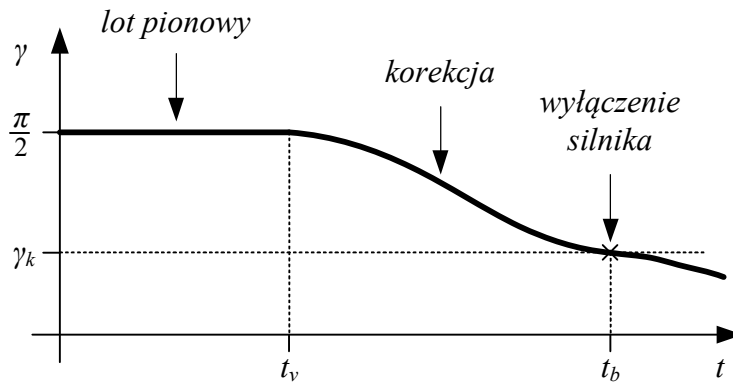
gdzie: T – ciąg silnika raketowego,

natomiast wektor przyspieszenia sterującego, normalny do wektora prędkości rakiety balistycznej, opisano zależnością:

$$\mathbf{a}_c = \frac{aT}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi t}{t_b - t_v} \right) \right] \boldsymbol{\delta} \quad (6)$$

gdzie: $\boldsymbol{\delta}$ – jednostkowy wektor sterujący,
 a – współczynnik korygujący,
 t_b – czas pracy silnika raketowego,
 t_v – czas lotu pionowego,

zapewniającą płynną regulację kąta pochylenia γ wektora prędkości do wartości założonej dla chwili wyłączenia napędu t_b (por. rys. 2).



Rys. 2. Programowa korekcja kąta pochylenia wektora prędkości rakiety balistycznej

Po wprowadzeniu wektora zmiennych stanu \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{6 \times 1} : \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (7)$$

wektora sterowania \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} \in \mathbf{R}^{6 \times 1} : \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} \quad \wedge \quad \|\boldsymbol{\delta}\| = 1 \quad (8)$$

i przedstawieniu zależności (1) w notacji macierzowej:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_t \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (9)$$

uzyskuje się następujące postaci równań opisujących lot rakiety balistycznej w centralnym polu grawitacyjnym:

- dla etapu I (start – lot pionowy):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}_1 \in \mathbf{R}^{6 \times 6} : \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathcal{G}_G + \omega^2 & 0 & 0 & \mathcal{G}_T + \mathcal{G}_D & 2\omega & 0 \\ 0 & \mathcal{G}_G + \omega^2 & 0 & -2\omega & \mathcal{G}_T + \mathcal{G}_D & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{G}_G & 0 & 0 & \mathcal{G}_T + \mathcal{G}_D \end{bmatrix} \quad (10)$$

- dla etapu II (start – korekcja nachylenia trajektorii):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_2 \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{A}_2 \in \mathbf{R}^{6 \times 6} : \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1$$

$$\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{6 \times 6} : \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{G}_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{G}_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{G}_C \end{bmatrix} \quad (11)$$

- dla etapu III (lot po krzywej balistycznej):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_3 \mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}_3 \in \mathbf{R}^{6 \times 6} : \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathcal{G}_G + \omega^2 & 0 & 0 & \mathcal{G}_D & 2\omega & 0 \\ 0 & \mathcal{G}_G + \omega^2 & 0 & -2\omega & \mathcal{G}_D & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{G}_G & 0 & 0 & \mathcal{G}_D \end{bmatrix} \quad (12)$$

Współczynniki w macierzach $\mathbf{A}_1 \div \mathbf{A}_3$ i \mathbf{B} określone są następującymi równaniami:

$$\mathcal{G}_C = -\frac{aT}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi t}{t_b - t_v} \right) \right] \quad (13a)$$

$$\mathcal{G}_D = -\frac{\rho_0 e^{-kh} c_D S}{2 \left(m_0 - \int_0^{t_b} \dot{m}_f dt \right) g} \|\mathbf{v}\| \quad (13b)$$

$$\mathcal{G}_G = -\frac{GM}{\|\mathbf{r}\|^3} \quad (13c)$$

$$g_T = \frac{T}{\left(m_0 - \int_0^{t_b} \dot{m}_f dt \right) \| \mathbf{v} \|} \quad (13d)$$

Składowe δ_x , δ_y , δ_z sygnału sterowania wyznaczone są dla każdego kroku obliczeń na podstawie układu równań (14), warunkującego wymaganą orientację wektora δ w przestrzeni:

$$\begin{cases} \delta \circ (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = 0 \\ \delta \circ \mathbf{v} = 0 \\ \delta \circ \mathbf{r} = \| \mathbf{r} \| \cos \gamma \\ \gamma = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{r} \circ \mathbf{v}}{\| \mathbf{r} \| \| \mathbf{v} \|} - \frac{\pi}{2} \right) \end{cases} \quad (14)$$

gdzie: γ – kąt pochylenia wektora prędkości (względem powierzchni Ziemi).

Początkowe wartości składowych wektora \mathbf{x} przyjmowane są jako:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cos \varphi \cos \lambda \\ R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (15)$$

zaś wektora δ jako:

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda & -\cos \varphi \sin \lambda & -\sin \varphi \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ \sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \xi \\ \sin \xi \end{bmatrix} \quad (16)$$

gdzie: ξ – zadany kierunek odchylenia wektora prędkości rakiety balistycznej,

λ – długość geograficzna,

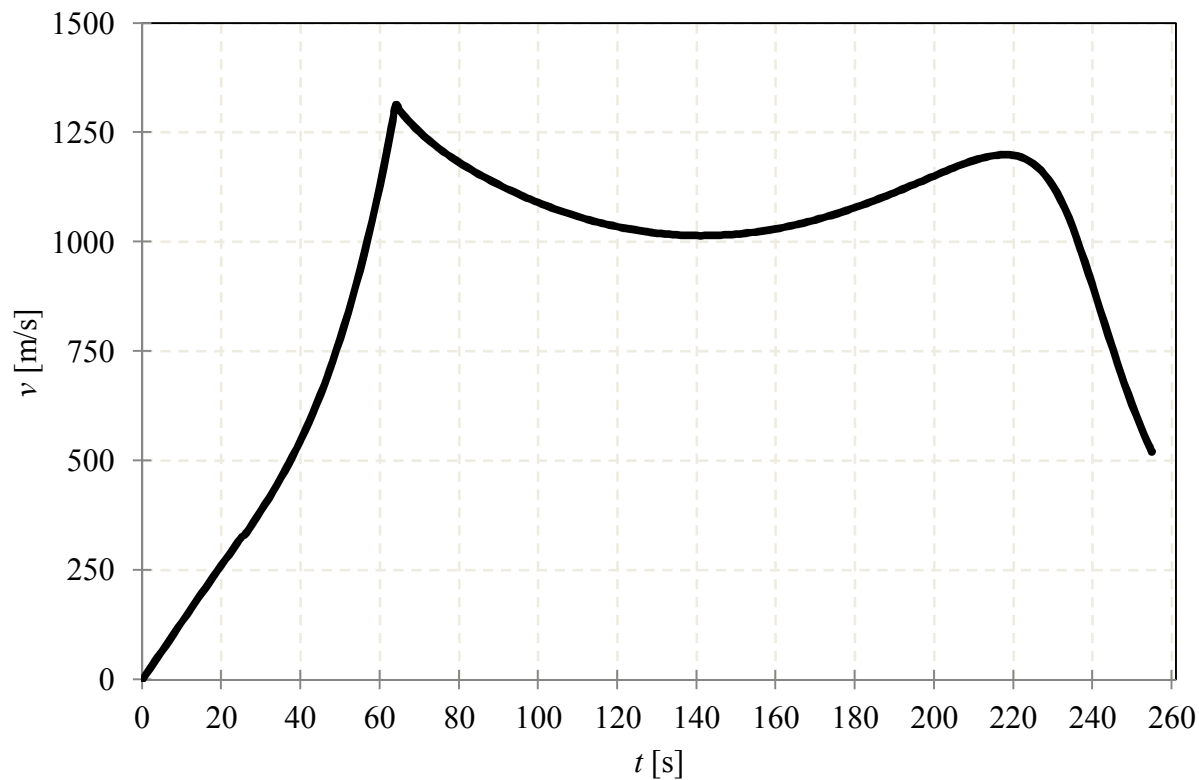
φ – szerokość geograficzna.

Program symulacyjny opracowano w języku skryptowym środowiska wspomaganie obliczeń MathWorks™ MATLAB®. Procedura całkowania numerycznego realizowana jest w oparciu o metodę Heuna. Przyjęto stały krok czasowy obliczeń.

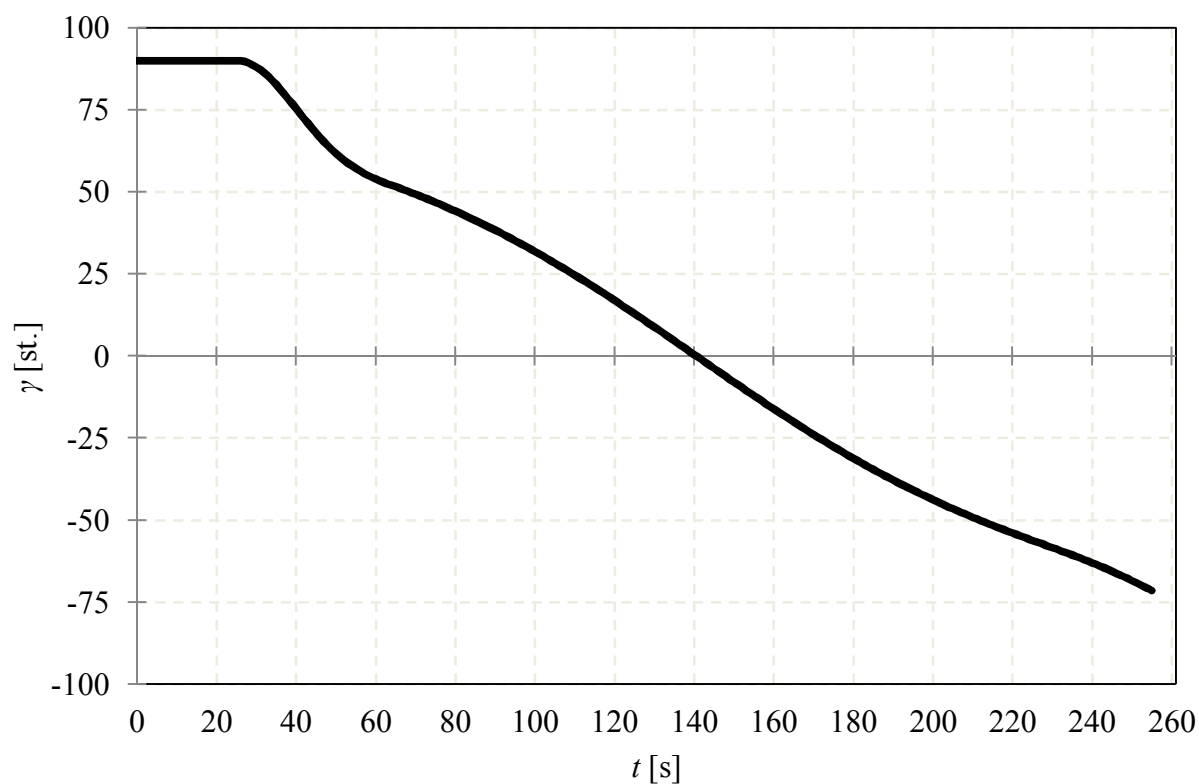
3. WYNIKI SYMULACJI

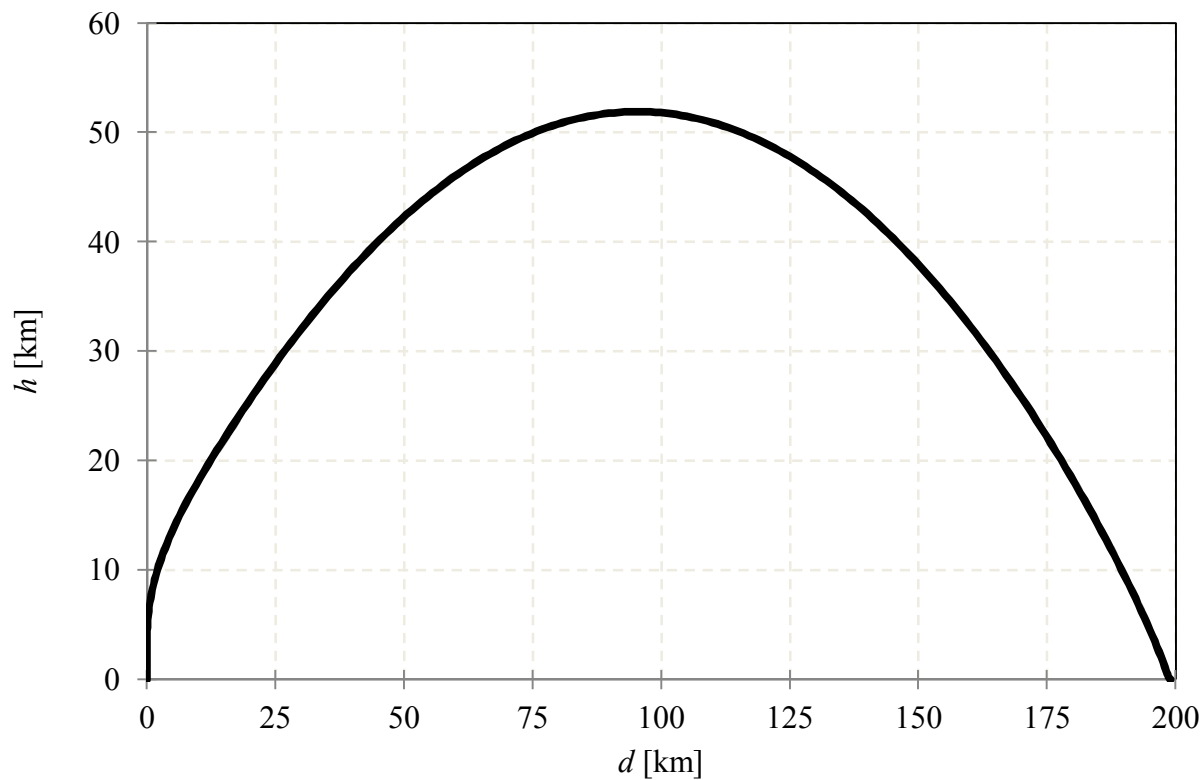
Wybrane wyniki symulacji zilustrowano na rys. 3-7.

Jako wzorzec fizyczny do weryfikacji opracowanego modelu matematycznego posłużyła rakietka 8K14 systemu 9K72 *Elbrus*. Na rysunkach 3-5 przedstawiono osiągi typowe dla tej klasy pocisków. Na rysunkach 6-7 zilustrowano wybrane wyniki badań symulacyjnych, obejmujące trajektorie oraz strefy rażenia raket balistycznych klasy SRBM (ang. *Short-Range Ballistic Missile*) i MRBM (ang. *Medium-Range Ballistic Missile*) dla różnych pozycji startowych.



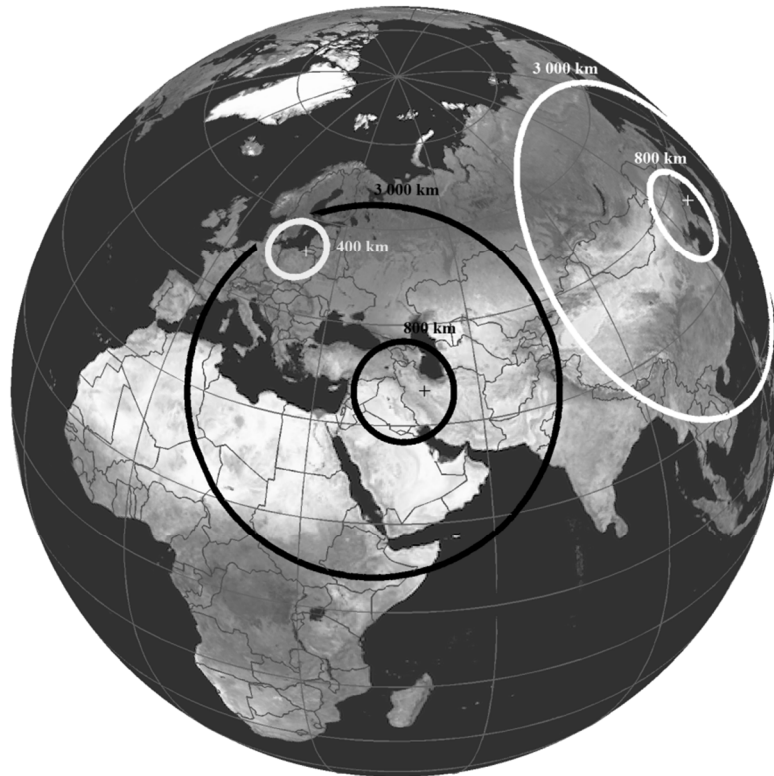
Rys. 3. Profil prędkości modelu rakiety balistycznej 8K14

Rys. 4. Zmiana kąta pochylenia γ wektora prędkości v dla modelu rakiety 8K14



Rys. 5. Trajektoria lotu modelu rakiety 8K14

Rys. 6. Przykładowe trajektorie rakiet MRBM wyznaczone dla pozycji startowych: Morze Barentsa ($75^{\circ}00'N$, $45^{\circ}00'E$) i Musudan-ri ($40^{\circ}51'N$, $129^{\circ}39'E$)



Rys. 7. Strefy rażenia wyznaczone przy stałych nastawach programów lotu rakiet balistycznych SRBM i MRBM dla pozycji startowych:
Musudan-ri ($40^{\circ}51'N$, $129^{\circ}39'E$), Emamshahr ($36^{\circ}25'N$, $55^{\circ}01'E$)
i Gwardiejsk-Tapiewo ($54^{\circ}39'N$, $21^{\circ}04'E$)

4. PODSUMOWANIE

Przedstawiony w artykule model matematyczny lotu rakiety balistycznej w centralnym polu grawitacyjnym umożliwia wyznaczanie trajektorii i parametrów ruchu modelowanych rakiet z uwzględnieniem krzywizny Ziemi, sił pozornych oraz uwarunkowań charakterystycznych dla poszczególnych faz lotu.

Opracowane równania macierzowe mogą być stosunkowo łatwo adaptowane na potrzeby procesów numerycznych i rozbudowywane o kolejne elementy. Ze względu na wymienione wyżej czynniki możliwe jest wykorzystanie opracowanego modelu matematycznego:

- do wyznaczania parametrów lotu rakiet balistycznych,
- do określania możliwości bojowych rakiet balistycznych, a tym samym szacowania stref rażenia i obszarów ryzyka,
- jako generatora danych wejściowych dla algorytmów symulacyjnych śledzenia i predykcji trajektorii rakiet balistycznych.

LITERATURA

- [1] Benavoli A., Chisci L., Farina A.: *Tracking of Ballistic Missile with A-Priori Information*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 43, Issue 3, 2007, pp. 1000-1016.
- [2] Cooperman R.L.: *Tactical Ballistic Missile Tracking using the Interacting Multiple Model Algorithm*, Proc. of the 5th International Conference on Information Fusion, Annapolis, 7-11 July 2002, pp. 824-831.
- [3] Pietrasieński J., Warchulski M., Warchulski J., Bużantowicz W.: *Uwarunkowania kinematyczne obserwacji pocisków balistycznych*, Mechanik, nr 7/2014, s. 569-574.
- [4] Zarchan P.: *Tactical and Strategic Missile Guidance*, Washington 2012.