

Dr hab. inż. Józef DREWNIAK, prof. ATH
Paulina GARLICKA
Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej

DOI: 10.17814/mechanik.2015.7.226

KOMPUTEROWO WSPOMAGANA ANALIZA KINEMATYKI MECHANIZMU DŹWIGNIOWEGO

Streszczenie: W artykule przedstawiono przykład wykorzystania grafów konturowych do analizy prędkości i przyspieszeń elementów mechanizmu dźwigniowego. Zastosowano metodę analizy bez stosowania dekompozycji mechanizmu. Otrzymany układ algebraicznych równań liniowych rozwiązano dla danego rozkładu prędkości i przyspieszeń ogniwa czynnego (korby) mechanizmu.

COMPUTER-AIDED ANALYSIS OF THE KINEMATICS OF LINK MECHANISM

Abstract: The article presents an example of using contour graphs to analyze the speed and acceleration of components of the lever mechanism without the use of decomposition mechanism. The resulting system of algebraic linear equations solved for a given distribution of velocity and acceleration of the active link (crank) mechanism.

Słowa kluczowe: mechanizm dźwigniowy, grafy konturowe, kinematyka
Keywords: link mechanism, contour graph, kinematics

1. WPROWADZENIE

Klasyczna metoda analityczna wyznaczania prędkości i przyspieszeń członów mechanizmów dźwigniowych polega na jednokrotnym różniczkowaniu względem czasu promieni – wektorów położenia węzłów mechanizmu [1-3]. W artykule tym zostanie przedstawiony sposób wykorzystania metody grafów konturowych do analizy kinematyki płaskiego mechanizmu dźwigniowego [4-7]. W przeciwieństwie do metody analitycznej, metoda grafów konturowych generuje tylko równania algebraiczne. Uproszczenie metody uzyskano dzięki pominięciu dekompozycji mechanizmu [5, 8]. Metoda grafów konturowych może być zastosowana zarówno do płaskich, jak i przestrzennych mechanizmów, których modelem obliczeniowym jest zamknięty łańcuch kinematyczny [4].

Obliczenia metodą grafów konturowych bez stosowania dekompozycji układu przeprowadza się zgodnie z następującym skróconym algorytmem [5]:

- a) wykreślenie analizowanego mechanizmu, przyjęcie układu współrzędnych xOy oraz określenie zakresu geometrycznego pracy poszczególnych węzłów mechanizmu,
- b) wykreślenie grafowego schematu kinematycznego mechanizmu o N niezależnych konturach,

- c) generowanie wektorowego układu równań prędkości dla całego konturu (N zamkniętych pętli) wraz z jego rozwiązaniem (po przekształceniach),
- d) generowanie wektorowego układu równań przyspieszeń dla całego konturu (N zamkniętych pętli) wraz z jego rozwiązaniem (po przekształceniach).

2. RÓWNANIA METODY GRAFÓW KONTUROWYCH [4]

Na rysunku 1 przedstawiono zamknięty łańcuch kinematyczny, który jest modelem mechanizmu dźwigniowego składającego się z n ogniw ruchomych. Ogniw są numerowane w kolejności od 0 do n . Ogniw o numerze 0 jest najczęściej unieruchomione i wtedy nazywane jest podstawą. Ogniw o numerze i połączone jest z ogniwem $i-1$ w punkcie A_i , natomiast z ogniwem $i+1$ w punkcie A_{i+1} . Każdy z punktów należy więc do dwóch sąsiednich ogniw i oraz $i+1$. Dla rozróżnienia przynależności punktu A_i np. do ogniw $i-1$ ($A_i \in i-1$) można punkt ten zapisać z podwójnym indeksem dolnym jako $A_{i,i-1}$. Podobnie punkt $A_i \in i$ zapisuje się jako $A_{i,i}$. Analiza prędkości poszczególnych ogniw mechanizmu opiera się na dwóch podstawowych zależnościach kinematycznych ruchu złożonego. Pierwsza zależność wyrażona jest wzorem (1) i dotyczy wyznaczania bezwzględnej prędkości kątowej ogniw i , gdy znana jest bezwzględna prędkość kątowa ogniw $i-1$ oraz względna prędkość kątowa ogniw i względem ogniw $i-1$:

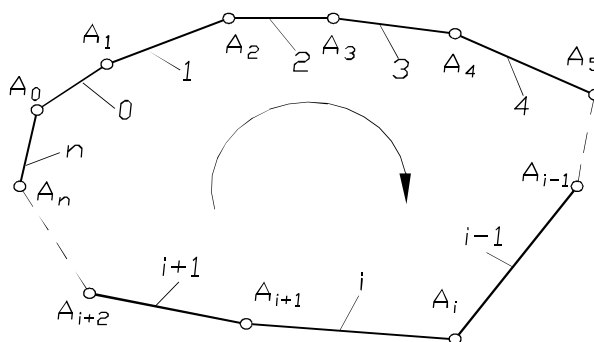
$$\omega_i = \omega_{i-1} + \omega_{i,i-1} \quad (1)$$

gdzie: $\omega_i = \omega_{i,0}$ – bezwzględna prędkość kątowa ogniw i , $\omega_{i-1} = \omega_{i-1,0}$ – bezwzględna prędkość kątowa ogniw $i-1$, $\omega_{i,i-1}$ – względna prędkość kątowa ogniw i względem ogniw $i-1$. Po rozpisaniu równania (1) dla zamkniętego łańcucha kinematycznego składającego się z n członów ruchomych oraz jednej podstawy 0 i zsumowaniu tak otrzymanych równań otrzymuje się pierwsze równanie wektorowe metody grafów konturowych dla zamkniętych łańcuchów kinematycznych:

$$\omega_{1,0} + \omega_{2,1} + \dots + \omega_{0,n} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

które można zapisać w postaci (3):

$$\sum_i \omega_{i,i-1} = \mathbf{0} \quad (3)$$



Rys. 1. Łańcuch kinematyczny zamknięty [4]

Drugie równanie wektorowe metody grafów konturowych otrzyma się z drugiej podstawowej zależności kinematycznej dotyczącej ruchu postępowo-obrotowego, czyli płaskiego. Zależność ta pozwala na określenie wypadkowej prędkości liniowej \mathbf{v}_{A_j} ogniwa j w punkcie A_j w zależności od prędkości unoszenia \mathbf{v}_{A_k} ogniwa k (w tym samym punkcie $A_k = A_j$) i prędkości względnej $\mathbf{v}_{A_{jk}}^r$ ogniwa j względem ogniwa k (we wspólnym punkcie $A = A_k = A_j$) (jak na rysunku 1):

$$\mathbf{v}_{A_j} = \mathbf{v}_{A_k} + \mathbf{v}_{A_{jk}}^r \quad (4)$$

gdzie: $\mathbf{v}_{A_{jk}}^r = \mathbf{v}_{A_{jA_k}}^r$.

Po przystosowaniu wzoru (4) dla zamkniętego łańcucha kinematycznego, gdzie istnieje zależność między prędkością $\mathbf{v}_{A_{i,i}}$ punktu $A_{i,i}$ oraz prędkością $\mathbf{v}_{A_{i,i-1}}$ punktu $A_{i,i-1}$, otrzymuje się zależność (5):

$$\mathbf{v}_{A_{i,i}} = \mathbf{v}_{A_{i,i-1}} + \mathbf{v}_{A_{i,i-1}}^r \quad (5)$$

gdzie $\mathbf{v}_{A_{i,i-1}}^r = \mathbf{v}_{A_{i,i}A_{i,i-1}}^r$ jest względną prędkością liniową punktu A_i na ogniwie i względem tego samego punktu A_i , ale należącego do ogniwa $i-1$ (rys. 1).

Zależność (5) można także zapisać dla dwóch różnych punktów A_{i+1} oraz A_i należących do tego samego ogniwa i (rys. 1):

$$\mathbf{v}_{A_{i+1,i}} = \mathbf{v}_{A_{i,i}} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{A_i A_{i+1}} \quad (6)$$

gdzie $\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i,0}$ jest bezwzględną prędkością kątową ogniwa i oraz $\mathbf{r}_{A_i A_{i+1}}$ jest promieniem – wektorem między punktami A_i i A_{i+1} .

Po dalszych przekształceniach otrzymuje się równanie (7):

$$\left[\mathbf{r}_{A_1} \times \boldsymbol{\omega}_{1,0} + \mathbf{r}_{A_2} \times \boldsymbol{\omega}_{2,1} + \dots + \mathbf{r}_{A_0} \times \boldsymbol{\omega}_{0,n} \right] + \left[\mathbf{v}_{A_{1,0}}^r + \mathbf{v}_{A_{2,1}}^r + \mathbf{v}_{A_{3,2}}^r + \dots + \mathbf{v}_{A_{0,n}}^r \right] = \mathbf{0}, \quad (7)$$

które zapisane w skróconej postaci (8) stanowi drugie równanie wektorowe metody grafów konturowych do wyznaczania prędkości kątowych $\boldsymbol{\omega}_{i,i-1}$:

$$\sum_i \mathbf{r}_{A_i} \times \boldsymbol{\omega}_{i,i-1} + \sum_i \mathbf{v}_{A_{i,i-1}}^r = \mathbf{0} \quad (8)$$

Analiza przyspieszeń mechanizmów metodą grafów konturowych oparta jest, podobnie jak metoda analizy prędkości, na przewodnim równaniu kinematyki, ale dotyczącym przyspieszeń ciał sztywnych:

$$\mathbf{a}_{A_j} = \mathbf{a}_{A_k} + \mathbf{a}_{A_{j,k}}^r + \mathbf{a}_{A_{j,k}}^c \quad (9)$$

gdzie \mathbf{a}_{A_j} , \mathbf{a}_{A_k} – bezwzględne przyspieszenia liniowe tego samego punktu A , ale raz należącego do ciała j , a drugi raz do ciała k , czyli $A_j \in j$ oraz $A_k \in k$; $\mathbf{a}_{A_{j,k}}^r = \mathbf{a}_{A_{jA_k}}^r$

- przyspieszenie względne punktu $A_j \in j$ względem punktu $A_k \in k$; $\mathbf{a}_{A_j,k}^c = \mathbf{a}_{A_j, A_k}^c$
 - przyspieszenie Coriolisa punktu $A_j \in j$ względem punktu $A_k \in k$, gdzie $\mathbf{a}_{A_j,k}^c = 2 \cdot \boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{v}_{A_j,k}^r$.
- Bezwzględne przyspieszenie kątowe $\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_{i,0}$ ogniwa sztywnego wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_{i-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{i,i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\omega}_{i,i-1} \quad (10)$$

gdzie $\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{i-1,0}$ jest bezwzględnym przyspieszeniem kątowym ogniwa $i-1$ oraz $\boldsymbol{\varepsilon}_{i,i-1}$ jest względnym przyspieszeniem kątowym ogniwa i względem ogniwa $i-1$.

Po rozpisaniu równania (10) na n równań (oddzielnie dla każdego z ogniw) i ich zsumowaniu, otrzyma się pierwsze równanie wektorowe dla przyspieszeń kątowych metody grafów konturowych:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{1,0} + \boldsymbol{\varepsilon}_{2,1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{3,2} + \dots + \boldsymbol{\varepsilon}_{n,n-1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_{1,0} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_{2,1} + \boldsymbol{\omega}_3 \times \boldsymbol{\omega}_{3,2} + \dots + \boldsymbol{\omega}_n \times \boldsymbol{\omega}_{n,n-1} = \mathbf{0}$$

lub w postaci zwartej:

$$\sum_i \boldsymbol{\varepsilon}_{i,i-1} + \sum_i \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\omega}_{i,i-1} = \mathbf{0} \quad (11)$$

Liniowe przyspieszenie punktu A_i ogniwa i wynosi:

$$\mathbf{a}_{A_i,i} = \mathbf{a}_{A_i,i-1} + \mathbf{a}_{A_i,i-1}^r + \mathbf{a}_{A_i,i-1}^c \quad (12)$$

gdzie $\mathbf{a}_{A_i,i-1}$ jest przyspieszeniem punktu A_i ogniwa $i-1$, $\mathbf{a}_{A_i,i-1}^r = \boldsymbol{\omega}_{A_i,i-1}^r \times \mathbf{r}_{A_i,i-1}$ – względnym przyspieszeniem punktu A_i należącego do ogniwa i względem tego samego punktu A_i , ale należącego do ogniwa $i-1$ oraz $\mathbf{a}_{A_i,i-1}^c$ jest przyspieszeniem Coriolisa:

$$\mathbf{a}_{A_i,i-1}^c = 2 \cdot \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{v}_{A_i,i-1}^r$$

Zależność dla liniowego przyspieszenia $\mathbf{a}_{A_{i+1},i}$ punktu $A_{i+1} \in i$ w zależności od przyspieszenia liniowego $\mathbf{a}_{A_i,i}$ punktu $A_i \in i$ (czyli dla dwóch różnych punktów A_{i+1} i A_i należących do tego samego ogniwa i) przedstawia się następująco:

$$\mathbf{a}_{A_{i+1},i} = \mathbf{a}_{A_i,i} + \boldsymbol{\varepsilon}_i \times \mathbf{r}_{A_i A_{i+1}} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{A_i A_{i+1}}) \quad (13)$$

gdzie $\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_{i,0}$ jest bezwzględnym przyspieszeniem kątowym ogniwa i , oraz $\mathbf{r}_{A_i A_{i+1}}$ jest promieniem – wektorem między punktami A_i i A_{i+1} .

Podstawiając zależność (12) do wzoru (13), otrzymuje się wzór na przyspieszenie liniowe punktu $A_{i+1,i}$, czyli punktu A_{i+1} należącego do ogniwa i :

$$\mathbf{a}_{A_{i+1},i} = \mathbf{a}_{A_i,i-1} + \mathbf{a}_{A_i,i-1}^r + \mathbf{a}_{A_i,i-1}^c + \boldsymbol{\varepsilon}_i \times \mathbf{r}_{A_i A_{i+1}} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{A_i A_{i+1}}) \quad (14)$$

Po rozpisaniu powyższego równania dla wszystkich ogniw mechanizmu i następnie ich zsumowaniu oraz wstawieniu zależności na promień – wektor \mathbf{r}_{Ai-1Ai} (15):

$$\mathbf{r}_{Ai-1Ai} = \mathbf{r}_{Ai} - \mathbf{r}_{Ai-1} \quad (15)$$

gdzie $\mathbf{r}_{Ai} = \mathbf{r}_{OAi}$ i $\mathbf{r}_{Ai-1} = \mathbf{r}_{OAi-1}$, otrzymuje się drugie równanie wektorowe metody grafów konturowych do wyznaczania przyspieszeń kątowych $\boldsymbol{\varepsilon}_{i,i-1}$:

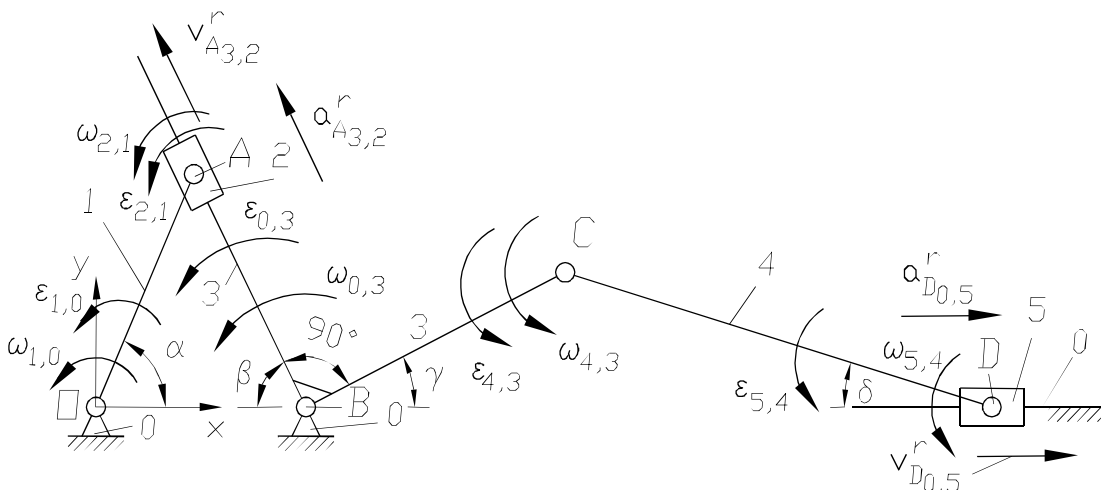
$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{a}_{A1,0}^r + \mathbf{a}_{A2,1}^r + \dots + \mathbf{a}_{Ai,i-1}^r + \dots + \mathbf{a}_{A0,n}^r \right] + \left[\mathbf{a}_{A1,0}^c + \mathbf{a}_{A2,1}^c + \dots + \mathbf{a}_{Ai,i-1}^c + \dots + \mathbf{a}_{A0,n}^c \right] + \\ & \left[\mathbf{r}_{A1} \times (\boldsymbol{\varepsilon}_{1,0} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_{1,0}) + \dots + \mathbf{r}_{Ai} \times (\boldsymbol{\varepsilon}_{i,i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\omega}_{i,i-1}) + \dots + \mathbf{r}_{A0} \times (\boldsymbol{\varepsilon}_{0,n} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega}_{0,n}) \right] + \\ & \left[\boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{A1A2}) + \dots + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{AiAi+1}) + \dots + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}_{A0A1}) \right] = \mathbf{0} \quad (16) \end{aligned}$$

które można zapisać w skróconej postaci (17):

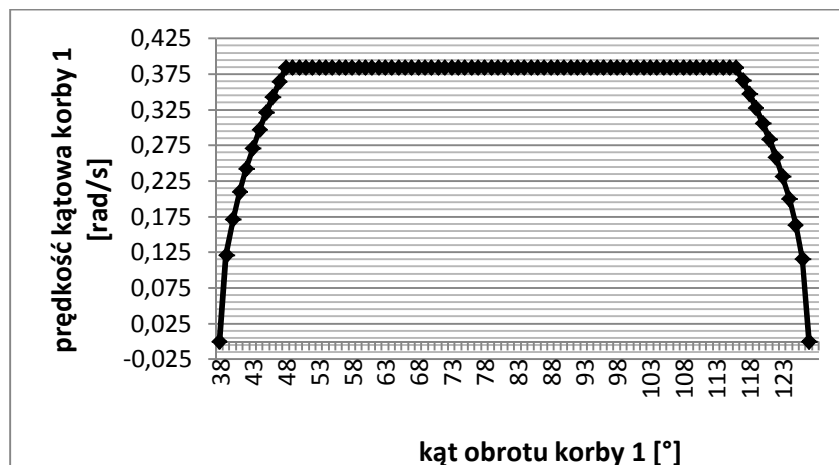
$$\sum_i \mathbf{a}_{Ai,i-1}^r + \sum_i \mathbf{a}_{Ai,i-1}^c + \sum_i \mathbf{r}_{Ai} \times (\boldsymbol{\varepsilon}_{i,i-1} \times \boldsymbol{\omega}_i - \boldsymbol{\omega}_{i,i-1}) + \sum_i \mathbf{r}_{Ai} \times (\boldsymbol{\varepsilon}_{i,i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\omega}_{i,i-1}) + \sum_i \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{AiAi+1}) = \mathbf{0} \quad (17)$$

3. OPIS PROBLEMU

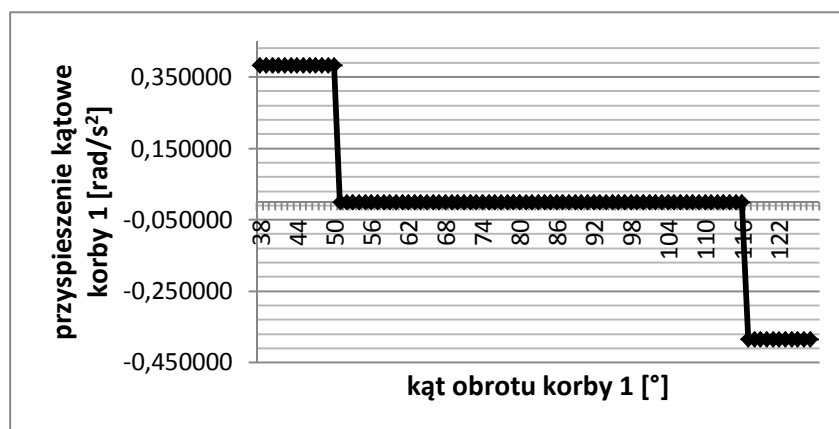
Analizie poddano mechanizm dźwigniowy z korbą 1 jako członem napędzającym i suwakiem 5 jako członem napędzanym (rys. 2). Dane są długości ogniw: $|OA| = 80$, $|OB| = 60$, $|BC| = 120$, $|CD| = 250$ oraz zakres ruchu obrotowego korbby 1: $\alpha \in (38^\circ; 128^\circ]$, przy czym dla $\alpha \in (38^\circ; 50^\circ]$ – rozruch (ruch jednostajnie przyspieszony), dla $\alpha \in (50^\circ; 116^\circ]$ – ruch ustalony jednostajny, dla $\alpha \in (116^\circ; 128^\circ]$ – hamowanie (ruch jednostajnie opóźniony). Rozkład prędkości i przyspieszeń przedstawiono na rys. 3 i 4.



Rys. 2. Analizowany mechanizm wraz z zaznaczonymi prędkościami i przyspieszeniami



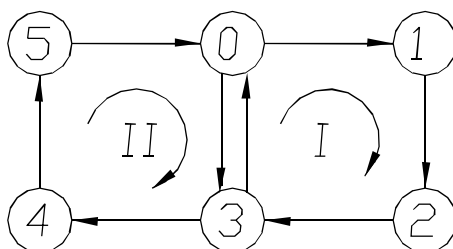
Rys. 3. Wykres prędkości kątowej korbki 1 w funkcji jej kąta obrotu



Rys. 4. Wykres przyspieszenia kątowego korbki 1 w funkcji jej kąta obrotu

4. GENEROWANIE UKŁADU WEKTOROWYCH RÓWNAŃ PRĘDKOŚCI

Zagadnienie analizy kinematyki zamkniętych mechanizmów dźwigniowych rozwiązuje się tutaj bez stosowania dekompozycji układu. W tym celu wykorzystuje się grafowy dwukonturowy schemat kinematyczny analizowanego mechanizmu przedstawiony na rys. 5.



Rys. 5. Grafowy dwukonturowy schemat kinematyczny analizowanego mechanizmu

Równaniami wejściowymi metody są równania wektorowe otrzymane z połączenia dwóch układów równań dla obydwu konturów grafowych I i II [4-6]:

$$\omega_{1,0} + \omega_{2,1} + \omega_{0,3} = \mathbf{0} \quad (18a)$$

$$\mathbf{r}_{OA} \times \boldsymbol{\omega}_{2,1} + \mathbf{r}_{OB} \times \boldsymbol{\omega}_{0,3} + \mathbf{v}_{A3,2}^r = \mathbf{0} \quad (18b)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{3,0} + \boldsymbol{\omega}_{4,3} + \boldsymbol{\omega}_{5,4} = \mathbf{0} \quad (18c)$$

$$\mathbf{r}_{OB} \times \boldsymbol{\omega}_{3,0} + \mathbf{r}_{OC} \times \boldsymbol{\omega}_{4,3} + \mathbf{r}_{OD} \times \boldsymbol{\omega}_{5,4} + \mathbf{v}_{D0,5}^r = \mathbf{0} \quad (18d)$$

Dana jest prędkość kątowa korby 1 mechanizmu:

$$\boldsymbol{\omega}_{1,0} = \omega_{1,0} \cdot \mathbf{k} = 6,283 \cdot \mathbf{k} \text{ rad/s}$$

Poszukiwane są prędkości kątowe pozostałych dźwigni (wg rys. 2):

$$\boldsymbol{\omega}_{2,1} = \omega_{2,1} \cdot \mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\omega}_{0,3} = \omega_{0,3} \cdot \mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\omega}_{3,0} = -\omega_{3,0} \cdot \mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\omega}_{0,3} = \omega_{3,0}, \quad \boldsymbol{\omega}_{4,3} = \omega_{4,3} \cdot \mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\omega}_{5,4} = \omega_{5,4} \cdot \mathbf{k}$$

Ponadto poszukiwane są prędkości liniowe suwaków 2 i 5:

$$\mathbf{v}_{A3,2}^r = v_{A3,2x}^r \cdot \mathbf{i} + v_{A3,2y}^r \cdot \mathbf{j} = -v_{A3,2}^r \cdot \cos \beta \cdot \mathbf{i} + v_{A3,2}^r \cdot \sin \beta \cdot \mathbf{j}$$

oraz

$$\mathbf{v}_{D0,5}^r = v_{D0,5x}^r \cdot \mathbf{i} = v_{D0,5}^r \cdot \mathbf{i} = -v_{D5,0x}^r \cdot \mathbf{i} = -v_{D5,0}^r \cdot \mathbf{i}$$

Iloczyny wektorowe w równaniach (18b) i (18d) można przekształcić do postaci (zgodnie z rys. 2):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{OA} \times \boldsymbol{\omega}_{2,1} &= y_A \cdot \omega_{2,1} \cdot \mathbf{i} - x_A \cdot \omega_{2,1} \cdot \mathbf{j}, & \mathbf{r}_{OB} \times \boldsymbol{\omega}_{0,3} &= y_B \cdot \omega_{0,3} \cdot \mathbf{i} - x_B \cdot \omega_{0,3} \cdot \mathbf{j} \\ \mathbf{r}_{OB} \times \boldsymbol{\omega}_{3,0} &= y_B \cdot (-\omega_{3,0}) \cdot \mathbf{i} - x_B \cdot (-\omega_{3,0}) \cdot \mathbf{j}, & \mathbf{r}_{OC} \times \boldsymbol{\omega}_{4,3} &= y_C \cdot \omega_{4,3} \cdot \mathbf{i} - x_C \cdot \omega_{4,3} \cdot \mathbf{j}, \\ \mathbf{r}_{OD} \times \boldsymbol{\omega}_{5,4} &= y_D \cdot \omega_{5,4} \cdot \mathbf{i} - x_D \cdot \omega_{5,4} \cdot \mathbf{j}, \end{aligned}$$

Następnie rzutując równania (18) na układ osi Oxyz, otrzymuje się algebraiczny układ równań:

$$\omega_{1,0} + \omega_{2,1} + \omega_{0,3} = 0 \quad \text{rzut na oś z} \quad (19a)$$

$$-\omega_{3,0} + \omega_{4,3} + \omega_{5,4} = 0 \quad \text{rzut na oś z} \quad (19b)$$

$$y_A \cdot \omega_{2,1} + y_B \cdot \omega_{3,0} - v_{A3,2}^r \cdot \cos \beta = 0 \quad \text{rzut na oś x} \quad (19c)$$

$$-x_A \cdot \omega_{2,1} - x_B \cdot \omega_{3,0} + v_{A3,2}^r \cdot \sin \beta = 0 \quad \text{rzut na oś y} \quad (19d)$$

$$-y_B \cdot \omega_{3,0} + y_C \cdot \omega_{4,3} + y_D \cdot \omega_{5,4} + v_{D0,5}^r = 0 \quad \text{rzut na oś x} \quad (19e)$$

$$x_B \cdot \omega_{3,0} - x_C \cdot \omega_{4,3} - x_D \cdot \omega_{5,4} = 0 \quad \text{rzut na oś y} \quad (19f)$$

Jest to układ sześciu równań zawierający sześć niewiadomych $\omega_{2,1}$, $\omega_{3,0} = \omega_{0,3}$, $\omega_{4,3}$, $\omega_{5,4}$ oraz $v_{A3,2}^r$ i $v_{D5,0}^r$.

5. GENEROWANIE UKŁADU WEKTOROWYCH RÓWNAŃ PRZYSPIESZEŃ

Zagadnienie analizy przyspieszeń zamkniętych mechanizmów dźwigniowych również będzie rozwiązane bez stosowania dekompozycji układu, czyli wykorzystuje się grafowy dwukonturowy schemat kinematyczny analizowanego mechanizmu przedstawiony na rys. 3. Równaniami wejściowymi metody są równania wektorowe otrzymane z połączenia dwóch układów równań dla obydwu części rozpatrywanego mechanizmu [4, 5, 7]:

$$\varepsilon_{1,0} + \varepsilon_{2,1} + \varepsilon_{0,3} = 0 \quad (20a)$$

$$\mathbf{r}_{OA} \times \varepsilon_{2,1} + \mathbf{r}_{OB} \times \varepsilon_{0,3} + \mathbf{a}_{A3,2}^r + \mathbf{a}_{A3,2}^c - \omega_{1,0}^2 \cdot \mathbf{r}_{OA} - \omega_{0,3}^2 \cdot \mathbf{r}_{AB} = 0 \quad (20b)$$

$$\varepsilon_{3,0} + \varepsilon_{4,3} + \varepsilon_{5,4} = 0 \quad (20c)$$

$$\mathbf{r}_{OB} \times \varepsilon_{3,0} + \mathbf{r}_{OC} \times \varepsilon_{4,3} + \mathbf{r}_{OD} \times \varepsilon_{5,4} + \mathbf{a}_{D0,5}^r + \mathbf{a}_{D0,5}^c - \omega_{3,0}^2 \cdot \mathbf{r}_{BC} - \omega_{4,0}^2 \cdot \mathbf{r}_{CD} = 0 \quad (20d)$$

Dane są prędkości i przyspieszenia kątowe korby 1 mechanizmu (rys. 3 i 4):

$$\omega_{1,0} = \omega_{1,0} \cdot \mathbf{k} = 6,283 \cdot \mathbf{k} \text{ rad/s}$$

Poszukiwane są przyspieszenia kątowe oraz liniowe pozostałych ogniów (wg rys. 2):

$$\varepsilon_{2,1} = \varepsilon_{2,1} \cdot \mathbf{k}, \quad \varepsilon_{0,3} = \varepsilon_{0,3} \cdot \mathbf{k}, \quad \varepsilon_{3,0} = -\varepsilon_{3,0} \cdot \mathbf{k}, \quad \varepsilon_{4,3} = \varepsilon_{4,3} \cdot \mathbf{k}, \quad \varepsilon_{5,4} = \varepsilon_{5,4} \cdot \mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}_{A3,2}^r = a_{A3,2x}^r \cdot \mathbf{i} + a_{A3,2y}^r \cdot \mathbf{j} = -a_{A3,2}^r \cdot \cos \beta \cdot \mathbf{i} + a_{A3,2}^r \cdot \sin \beta \cdot \mathbf{j}$$

oraz $\mathbf{a}_{D0,5}^r = a_{D0,5x}^r \cdot \mathbf{i} = a_{D0,5}^r \cdot \mathbf{i} = -a_{D5,0x}^r \cdot \mathbf{i} = -a_{D5,0}^r \cdot \mathbf{i}$

Iloczyny wektorowe w równaniach (20b) i (20d) można przekształcić do postaci (zgodnie z rys. 2):

$$\mathbf{r}_{OA} \times \varepsilon_{2,1} = y_A \cdot \varepsilon_{2,1} \cdot \mathbf{i} - x_A \cdot \varepsilon_{2,1} \cdot \mathbf{j} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{r}_{OB} \times \varepsilon_{0,3} = y_B \cdot \varepsilon_{0,3} \cdot \mathbf{i} - x_B \cdot \varepsilon_{0,3} \cdot \mathbf{j},$$

$$\mathbf{r}_{OB} \times \varepsilon_{3,0} = y_B \cdot (-\varepsilon_{3,0}) \cdot \mathbf{i} - x_B \cdot (-\varepsilon_{3,0}) \cdot \mathbf{j}, \quad \mathbf{r}_{OC} \times \varepsilon_{4,3} = y_C \cdot \varepsilon_{4,3} \cdot \mathbf{i} - x_C \cdot \varepsilon_{4,3} \cdot \mathbf{j}.$$

$$\mathbf{r}_{OD} \times \varepsilon_{5,4} = y_D \cdot \varepsilon_{5,4} \cdot \mathbf{i} - x_D \cdot \varepsilon_{5,4} \cdot \mathbf{j}$$

Przyspieszenie Coriolisa $\mathbf{a}_{A3,2}^c$ punktu A na ogniwie 3 względem punktu A na ogniwie 2 można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{A3,2}^c &= 2 \cdot \omega_{3,0} \times \mathbf{v}_{A3,2}^r = 2 \cdot (-\omega_{3,0} \cdot \mathbf{k}) \times (-v_{A3,2x}^r \cdot \mathbf{i} + v_{A3,2y}^r \cdot \mathbf{j}) = \\ &= 2 \cdot \omega_{3,0} \cdot (v_{A3,2}^r \cdot \sin \beta) \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \omega_{3,0} \cdot (v_{A3,2}^r \cdot \cos \beta) \cdot \mathbf{j} \end{aligned}$$

Następnie rzutując równania (20) na układ osi Oxyz, otrzymuje się algebraiczny układ równań:

$$\varepsilon_{1,0} + \varepsilon_{2,1} - \varepsilon_{3,0} = 0 \quad (21a)$$

$$-\varepsilon_{3,0} + \varepsilon_{4,3} + \varepsilon_{5,4} = 0 \quad (21b)$$

$$y_A \cdot \varepsilon_{2,1} - y_B \cdot \varepsilon_{3,0} - a_{A3,2}^r \cdot \cos \beta + 2 \cdot \omega_{3,0} \cdot v_{A3,2}^r \cdot \sin \beta - \omega_{1,0}^2 \cdot x_A - \omega_{3,0}^2 \cdot (x_B - x_A) = 0, \quad (21c)$$

$$-x_A \cdot \varepsilon_{2,1} - x_B \cdot \varepsilon_{3,0} + a_{A3,2}^r \cdot \sin \beta + 2 \cdot \omega_{3,0} \cdot v_{A3,2}^r \cdot \cos \beta - \omega_{1,0}^2 \cdot y_A - \omega_{3,0}^2 \cdot (-y_A) = 0, \quad (21d)$$

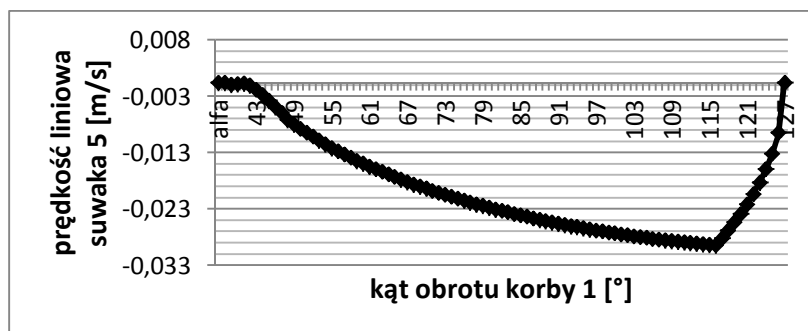
$$-y_B \cdot \varepsilon_{3,0} + y_C \cdot \varepsilon_{4,3} + a_{D0,5}^r - \omega_{3,0}^2 \cdot (x_C - x_B) - \omega_{5,4}^2 \cdot (x_D - x_C) = 0, \quad (21e)$$

$$-x_B \cdot (-\varepsilon_{3,0}) - x_C \cdot \varepsilon_{4,3} - x_D \cdot \varepsilon_{5,4} - \omega_{3,0}^2 \cdot y_C - \omega_{5,4}^2 \cdot (-y_C) = 0 \quad (21f)$$

Jest to układ sześciu równań zawierający sześć niewiadomych $\varepsilon_{2,1}$, $\varepsilon_{3,0}$, $\varepsilon_{4,3}$, $\varepsilon_{5,4}$ oraz $a_{A3,2}^r$ i $a_{D0,5}^r$.

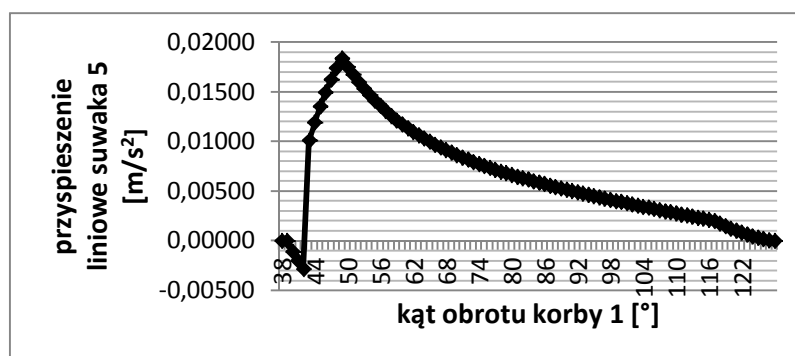
6. WYNIKI ANALIZY

Układy równań (19) i (21) rozwiązano w arkuszu kalkulacyjnym dla całego zakresu pracy mechanizmu, tzn. dla stref rozruchu, ruchu jednostajnego oraz hamowania korby czynnej 1 dla danych przedstawionych na wykresach (rys. 3 i 4). Wyznaczono wartości wszystkich niewiadomych wymienionych w rozdziałach 3 i 4. Na rysunku 6 przedstawiono wykres prędkości liniowej suwaka 5 w funkcji kąta obrotu korby 1.



Rys. 6. Wykres prędkości liniowej suwaka 5 w funkcji kąta obrotu korby 1

Natomiast na rys. 7 przedstawiono wykres przyspieszenia suwaka 5 w funkcji kąta obrotu korby 1 dla tych samych danych (rys. 3 i 4) oraz dodatkowo dla wartości prędkości członów wyznaczonych wcześniej z pierwszego układu równań (19).



Rys. 7. Wykres przyspieszenia liniowego suwaka 5 w funkcji kąta obrotu korby 1

7. WNIOSKI

W niniejszym artykule udowodniono, że metoda grafów konturowych bez stosowania dekompozycji analizowanego mechanizmu na prostsze struktury jest również efektywna, podobnie jak z dekompozycją przedstawioną w pracy [4].

Na podstawie obliczeń przeprowadzonych w niniejszym artykule można stwierdzić, że metoda grafów konturowych jest bardzo efektywnym narzędziem do analizy kinematyki mechanizmów ze sztywnymi ogniwami. Zalety tej metody uwidoczniają się jeszcze bardziej, gdy analizuje się ruch mechanizmu składający się np. z okresów rozruchu, ruchu ustalonego i hamowania oraz nawrotu. Udowodniono więc tutaj, że metoda grafów konturowych bez stosowania dekompozycji analizowanego mechanizmu na prostsze struktury jest równie efektywna, jak z dekompozycją przedstawioną w pracy [4]. Ponadto dzięki temu, że metoda grafów konturowych wykorzystuje tylko równania algebraiczne, rozwiązywanie zagadnień odwrotnych kinematyki jest bardzo ułatwione. Należy tutaj podkreślić, że metoda grafów

konturowych może być także wykorzystana do przeprowadzania analiz kinematyki i dynamiki mechanizmów przestrzennych.

LITERATURA

- [1] Frączek J., Wojtyra M.: *Kinematyka układów wieloczłonowych. Metody obliczeniowe* WNT, Warszawa 2008.
- [2] Adamczyk E., Jucha J., Miller S.: *Teoria mechanizmów i maszyn*, Politechnika Wrocławska, Wrocław 1976.
- [3] Parszewski Z.: *Teoria maszyn i mechanizmów*, WNT, Warszawa 1967.
- [4] Marghitu D.B.: *Kinematic Chains and Machine Components Design*, ELSEVIER 2005.
- [5] Dobija M.: *Analiza kinematyczna zamkniętych mechanizmów dźwigniowych metodą grafów konturowych*, praca dyplomowa inżynierska, ATH, Bielsko-Biała, 2014.
- [6] Drewniak J., Garlicka P.: *Metoda analizy prędkości transportowego mechanizmu dźwigniowego*, Logistyka, nr 3/2015.
- [7] Drewniak J., Garlicka P.: *Metoda analizy przyspieszeń transportowego mechanizmu dźwigniowego*, Logistyka, nr 3/2015.
- [8] Dobija M., Drewniak J., Kopec J., Zawisłak S., Shingissov B., Algazy Z.: *Countour graph application in kinematical analysis of crane mechanism*, Współczesne trendy w teorii maszyn i układów mechatronicznych. XXIV Międzynarodowa Konferencja Naukowa Teorii Maszyn i Układów Mechatronicznych, Wrocław – Szklarska Poręba, 2014, s. 135.