

Dr hab. inż. Józef DREWNIAK, prof. ATH

DOI: 10.17814/mechanik.2015.7.227

Mgr inż. Leszek HOJDYS

Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej

## KOMPUTEROWE WSPOMAGANIE ANALIZY TRWAŁOŚCI ZMĘCZENIOWEJ WALCOWYCH KÓŁ ZĘBATYCH

*Streszczenie: W artykule zaprezentowano opracowane oprogramowanie służące do wyznaczania trwałości zmęczeniowej zębów kół walcowych. Oprogramowanie to umożliwia wyznaczenie czterech rodzajów dystrybuant trwałości zmęczeniowej: dystrybuanty bazującej na stacjonarnym lub niestacjonarnym modelu Bogdanowa–Kozina, dystrybuanty rozkładu Weibulla oraz dystrybuanty wyznaczonej na podstawie danych eksperymentalnych. W oprogramowaniu tym szczególny nacisk położono na oparty na włożonych łańcuchach Markowa stacjonarny i niestacjonarny model Bogdanowa–Kozina. Parametry powyższych dystrybuant wyznaczone są na podstawie wprowadzonych do programu danych z badań zmęczeniowych. Jako przykład wykorzystania oprogramowania została przeprowadzona analiza wyników własnych badań zmęczeniowych oraz pittingu walcowych kół zębatach.*

## COMPUTER AIDED ANALYSIS THE FATIGUE LIFE OF CYLINDRICAL GEARS

*Abstract: In this paper has been presented the original software used to determine the fatigue life of cylindrical gear teeth. This software allows to determine the cumulative distribution function of fatigue life using four types of its version: cumulative distribution based on the stationary or nonstationary Bogdanov–Kozin model, Weibull distribution function and the distribution function defined on the basis of experimental data. In the software, particular emphasis was put on stationary and nonstationary Bogdanov–Kozin model based on Markov chains. Parameters of these distribution functions are determined based on the data entered into the program from fatigue tests. As an example of the use of the software was conducted analysis of the results of own fatigue and pitting corrosion tests of cylindrical gears.*

*Słowa kluczowe: zmęczenie materiałów, oprogramowanie, łańcuchy Markowa, koła zębata, trwałość zmęczeniowa, stacjonarny model Bogdanowa–Kozina, niestacjonarny model Bogdanowa–Kozina*

*Keywords: fatigue of materials, software, Markov chains, gears, fatigue life, stationary Bogdanov–Kozin model, nonstationary Bogdanov–Kozin model*

### 1. WPROWADZENIE

Jedną z głównych przyczyn uszkodzeń elementów maszyn jest zmęczenie materiałów konstrukcyjnych. Dlatego ważne jest, aby każdy konstruktor posiadał umiejętność szacowania

z mniej lub większą dokładnością trwałości i wytrzymałości zmęczeniowej projektowanych elementów maszyn. Zjawisko zmęczenia materiałów z powodu dużej złożoności jest bardzo trudne do przewidzenia. Dodatkowo występuje tutaj duży rozrzut statystyczny wyników badań. Dlatego też wyznaczanie trwałości zmęczeniowej metodami deterministycznymi jest coraz częściej zastępowane metodami probabilistycznymi [1, 2]. Na podkreślenie zasługuje tutaj metoda Monte Carlo [3, 4] oraz modelowanie procesu zmęczenia jednym ze statystycznych rozkładów ekstremalnych, np. rozkładem Weibulla [5]. Coraz większą popularność zyskuje model kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych opracowany przez Bogdanowa i Kozina [6], a wykorzystujący założenia teorii łańcuchów Markowa [5, 6, 16]. Model ten może być stosowany do opisu i analizy nie tylko procesu kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych, ale również zmęczeniowego wzrostu pęknięcia, zużycia, pełzania czy korozji [7, 15].

W wielu przypadkach fizyczne próby zmęczeniowe można zastąpić odpowiednio skonstruowanym modelem matematycznym. Niniejsza praca poświęcona jest oryginalnemu oprogramowaniu służącemu do numerycznej analizy procesu zmęczenia zębów kół walcowych. W oprogramowaniu tym zostały zaimplementowane metody wyznaczania trwałości zmęczeniowej oparte na modelu Bogdanowa–Kozina, wykorzystującym włożone łańcuchy Markowa [6, 7].

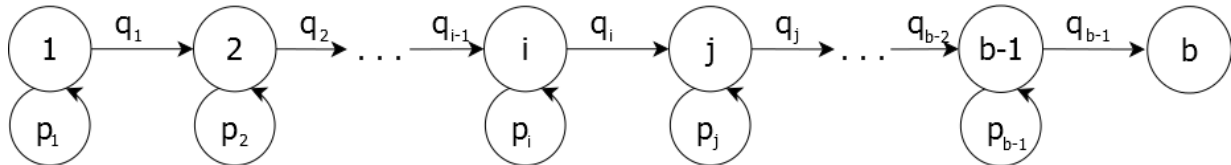
## 2. STACJONARNY MODEL BOGDANOWA–KOZINA

Podstawowym pojęciem modelu Bogdanowa jest cykl obciążenia (CO) rozumiany jako powtarzalny okres obciążeń elementu maszyny powodujący kumulację uszkodzeń zmęczeniowych. Przykładem cykli obciążeń jest czas pracy okresowo używanego urządzenia pomiędzy jego włączeniem a wyłączeniem, otwieranie i zamykanie zamka do drzwi, podnoszenie i opuszczanie podwozia podczas startu i lądowania samolotu, czy też blok obciążeń programowych podczas badań zmęczeniowych. Trwałość elementu maszyny w takim przypadku liczona jest w dyskretnych cyklach obciążenia  $x = 0, 1, 2, \dots$ . Również stopień kumulacji uszkodzeń opisywany jest za pomocą dyskretnego zbioru stanów  $j = 1, 2, \dots, b$ . Inaczej mówiąc, proces kumulacji uszkodzeń został zdefiniowany jako dyskretny zarówno w czasie, jak i stanach proces stochastyczny [8].

Model Bogdanowa–Kozina zakłada, że przyrost uszkodzenia na końcu cyklu obciążenia zależy tylko w probabilistyczny sposób od stopnia uszkodzenia na początku cyklu oraz od intensywności samego cyklu, nie zależy natomiast od sposobu sumowania uszkodzeń w poprzednich stanach. Dodatkowo model zakłada, że stopień uszkodzenia może się tylko zwiększać. Proces taki jest więc modelowany za pomocą włożonego łańcucha Markowa, a jego przebieg w czasie jednego cyklu obciążeniowego o stałej intensywności określony jest przez  $(b \times b)$  wymiarową macierz prawdopodobieństwa przejść:

$$Q = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_j & q_j & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & p_{b-1} & q_{b-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

gdzie  $p_j$  jest prawdopodobieństwem utrzymania się stopnia uszkodzenia w stanie  $j$  w czasie trwania pojedynczego cyklu obciążeniowego. Zgodnie z modelem uderzeniowym, jest to prawdopodobieństwo wystąpienia uderzenia o wartości mniejszej od poziomu krytycznego w czasie, gdy stopień uszkodzenia odpowiadał stanowi  $j$ ,  $q_j$  jest prawdopodobieństwem zwiększenia się stopnia uszkodzenia w czasie pojedynczego cyklu obciążeniowego do poziomu  $j+1$  pod warunkiem, że na początku cyklu obciążeniowego stopień uszkodzenia odpowiadał stanowi  $j$ . Powyższy proces można przedstawić za pomocą grafu:



Rys. 1. Graf przejść dla modelu Bogdanowa-Kozina [6]

W grafie tym wierzchołki przedstawiają stany modelu (stopień uszkodzenia), natomiast krawędzie oznaczone  $q_1$  do  $q_{b-1}$  przedstawiają zwiększenie stopnia uszkodzenia, a krawędzie oznaczone  $p_1$  do  $p_{b-1}$  oznaczają utrzymanie się bieżącego stopnia uszkodzenia.

Pomiędzy parametrami  $q_j$  i  $p_j$  zachodzą następujące zależności:

$$0 < p_j < 1 \quad p_j + q_j = 1 \quad (2)$$

Do skonstruowania łańcucha Markowa, opisującego przebieg kumulacji uszkodzeń zwłaszcza w procesie eksploatacji, wymagana jest znajomość rozkładu prawdopodobieństwa stanu początkowego uszkodzenia dla czasu  $x = 0$ . Wartość stanu początkowego uszkodzenia związana jest najczęściej z wadami fabrycznym, skutkami złego przechowywania itp. Jego wartość jest w praktyce trudna do oszacowania. Rozkład prawdopodobieństwa stanu początkowego przedstawia się w postaci wektora:

$$p_0 = [\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{b-1}, 0] \quad (3)$$

gdzie  $\Pi_j$  jest prawdopodobieństwem zgodności stopnia początkowego uszkodzenia  $D_0$  ze stanem  $j$ . Dla elementów tego wektora zachodzą następujące zależności:

$$P(D_0 = j) = \Pi_j \geq 0 \quad \sum_{j=1}^{b-1} \Pi_j = 0 \quad (4)$$

Znając macierz prawdopodobieństwa przejść  $Q$  oraz wektor rozkładu prawdopodobieństwa początkowego  $p_0$ , można wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa  $p_x$ , stosując podstawową zależność w teorii łańcuchów Markowa:

$$p_x = p_0 \cdot Q^x \quad (5)$$

Z powyższej zależności wyznacza się najczęściej tylko dystrybuantę trwałości zmęczeniowej (DTZ) czasu  $W_b$  do zniszczenia w stanie  $b$ , czyli  $p_x(b)$ :

$$F(x) = P(W_b \leq x) = p_x(b) \quad \text{dla} \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

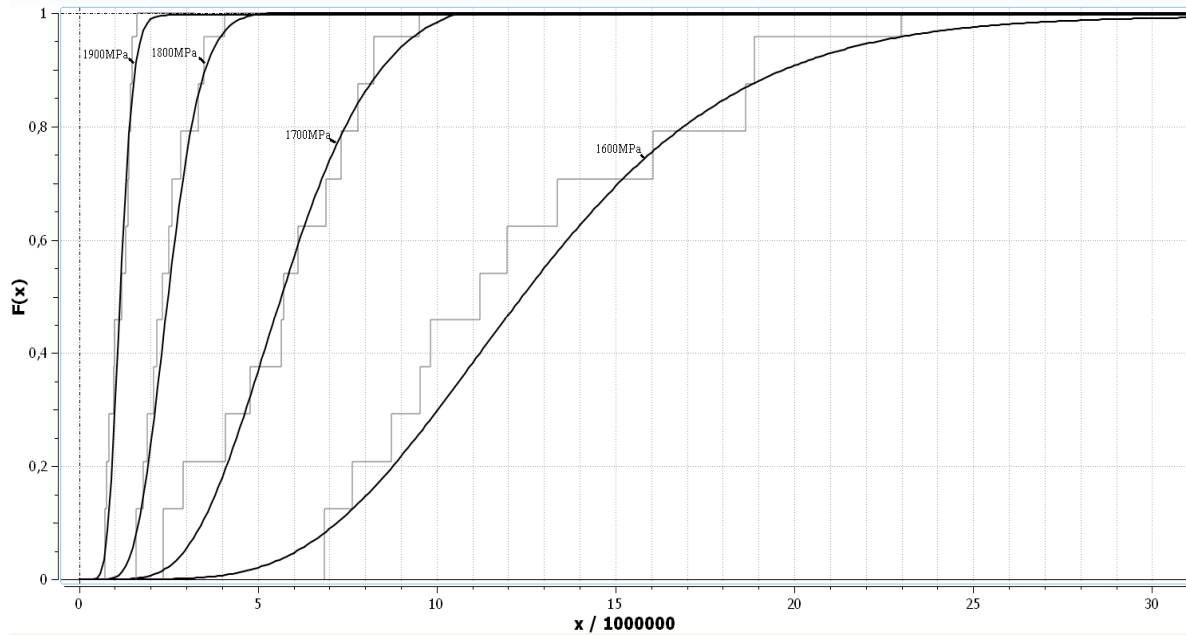
Model stacjonarny Bogdanowa–Kozina został użyty do opracowania wyników badań stykowej wytrzymałości zmęczeniowej kół zębatach, które zostały przeprowadzone na stanowisku mocy zamkniętej w laboratorium PKM Akademii Techniczno-Humanistycznej. Badano koła – próbki wykonane ze stali 17CrMoNi, których powierzchnie zębów były nawęglane i hartowane do twardości  $61 \pm 2\text{HRC}$ . Moduł kół – próbek zgodnie z normą ISO 6336/5 wynosił  $m = 5$ , liczby zębów  $z_1 = 18$  oraz  $z_2 = 21$ , współczynnik przesunięcia zarysu zębniaka – próbki  $x_1 = 0.35$ , odległość osi badanej przekładni  $a = 100$  i dokładność wykonania kół – próbek – klasa 5 wg ISO 1328. Zgodnie z normą ISO 6336/5 przyjęto bazową liczbę cykli  $N_{\text{Hlimb}} = 5 \cdot 10^7$ .

Wykonano po 12 pozytywnych prób zmęczeniowych na każdym z czterech poziomów naprężeń o wartościach  $\sigma_{\text{H1}} = 1600\text{MPa}$ ,  $\sigma_{\text{H2}} = 1700\text{MPa}$ ,  $\sigma_{\text{H3}} = 1800\text{MPa}$  oraz  $\sigma_{\text{H4}} = 1900\text{MPa}$  (tab. 1). Jako kryterium zaliczenia próby zmęczeniowej przyjęto zgodnie z normą ISO 6336/5 zniszczenie zmęczeniowe powierzchni o wartości 0,5% czynnej powierzchni boków wszystkich hartowanych zębów współpracującej pary kół – próbek lub 4% czynnej powierzchni boku jednego zęba.

Tabela 1. Wyniki badań doświadczalnych stykowej wytrzymałości zmęczeniowej kół zębatach

Nr serii	1	2	3	4	
$\sigma_{\text{Hi}}$ [MPa]	1600	1700	1800	1900	
Liczba cykli do zniszczenia próbki ( $N_i$ )	$N_1$	6850290	2344980	1590190	733060
	$N_2$	7637520	2905660	1793220	759910
	$N_3$	8734550	4089020	1903550	834120
	$N_4$	9533400	4778810	2081500	979720
	$N_5$	9833910	5655590	2172720	1003110
	$N_6$	11202230	5712230	2332620	1191230
	$N_7$	11956770	6123300	2504010	1300520
	$N_8$	13366820	6899220	259923	1363360
	$N_9$	16055210	7334550	2833070	1401130
	$N_{10}$	18633700	7788130	3325670	1440320
	$N_{11}$	18892210	8234170	3488330	1482510
	$N_{12}$	22988820	9523030	4076950	1611030
$\hat{m}_x$	12973785,8	5949057,5	2558421,7	1175001,7	
$\hat{\sigma}_{xx}^2$	$26074981,3 \cdot 10^6$	$4677548,8 \cdot 10^6$	$5653140,9 \cdot 10^5$	$9174568,3 \cdot 10^4$	

Dla każdej serii pomiarowej wyznaczono dystrybuantę trwałości zmęczeniowej za pomocą stacjonarnego modelu Bogdanowa–Kozina. Jej przebieg został porównany ze schodkową eksperymentalną dystrybuantą trwałości zmęczeniowej. Otrzymane dystrybuanty zostały przedstawione na rysunku 2.



Rys. 2. Dystrybuanty trwałości zmęczeniowej opracowane na podstawie wyników badań stykowej wytrzymałości zmęczeniowej kół zębatach

### 3. NIESTACJONARNY MODEL BOGDANOWA–KOZINA

Obciążenia, jakim poddawany jest element konstrukcyjny, najczęściej mają zmienną amplitudę w funkcji czasu, więc proces kumulacji uszkodzeń jest opisany wzorem:

$$p_x = p_0 \cdot \prod_{k=1}^x Q_k \quad \text{dla } x = 1, 2, \dots \quad (7)$$

gdzie  $Q_k$  jest macierzą prawdopodobieństwa przejść definiującą  $k$ -te natężenie cyklu obciążeniowego:

$$Q_k = \begin{bmatrix} p_1(k) & q_1(k) & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2(k) & q_2(k) & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & p_{b-1}(k) & q_{b-1}(k) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Niestacjonarny model kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych może być stosowany nie tylko w przypadku zmiennego natężenia cyklu obciążeniowego, ale również wtedy, kiedy na proces kumulacji uszkodzeń mają wpływ właściwości materiału i otoczenie [6, 7].

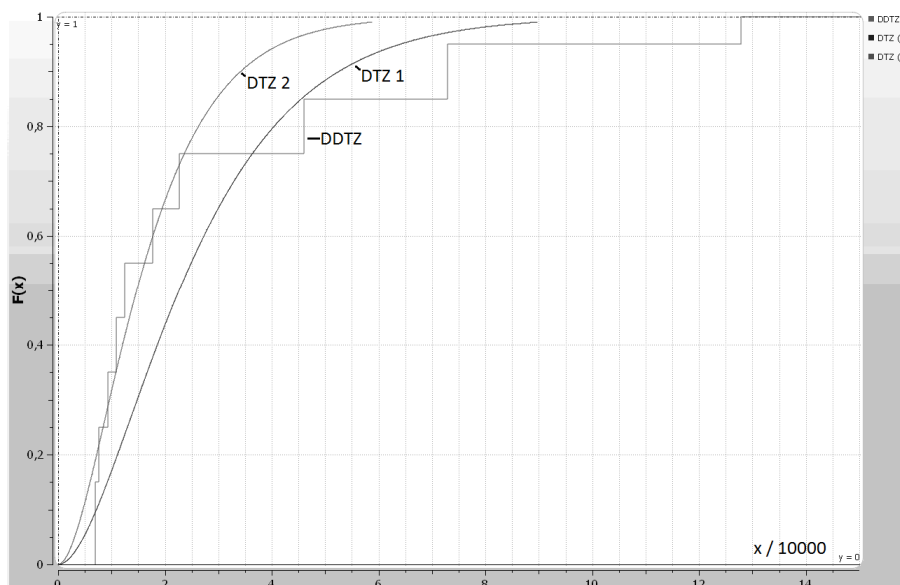
W Katedrze Podstaw Budowy Maszyn ATH zostały wykonane dwa badania zmęczeniowe, przy programowych obciążeniach typu „wysoko – nisko” (badanie 1) oraz „nisko – wysoko” (badanie 2). W tabeli 2 zostały zamieszczone wyniki tych badań. Ilość cykli obciążenia, po której nastąpiła zmiana wartości amplitudy, została oznaczona w tabeli jako  $x_1$ .

Tabela 2. Wyniki programowych badań zmęczeniowych

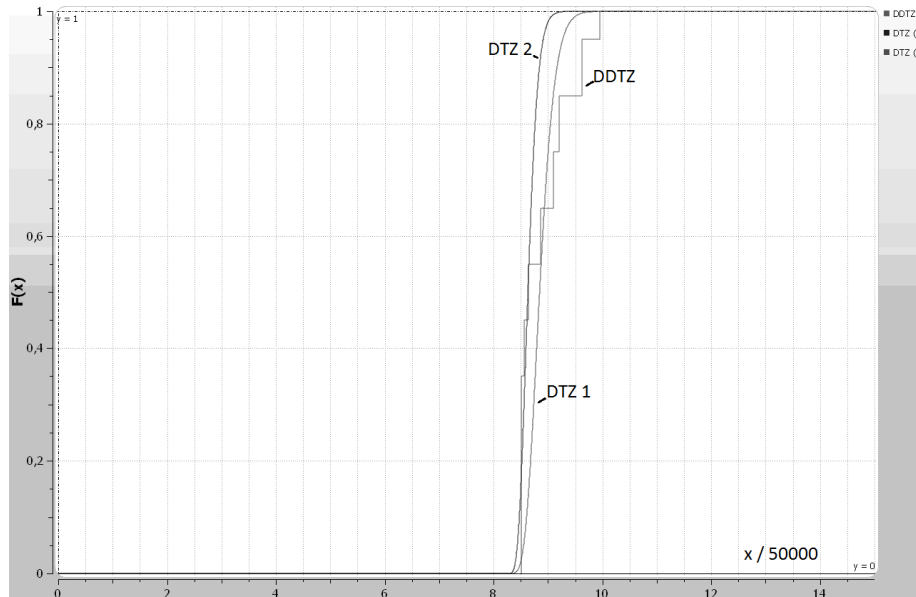
Numer badania		1	2
$\sigma_1$ [MPa]		1111	841,2
$\sigma_2$ [MPa]		841,2	1111
$x_1$		32000	425000
Liczba cykli, po której nastąpiło zniszczenie próbki ( $N_i$ )	$N_1$	35000	425200
	$N_2$	38100	425500
	$N_3$	46600	425800
	$N_4$	54200	428300
	$N_5$	62300	432100
	$N_6$	88500	443300
	$N_7$	113200	454800
	$N_8$	230200	460500
	$N_9$	364500	481100
	$N_{10}$	639000	497700
Wartość średnia trwałości $\hat{m}_x$		167160	447425
Wariancja trwałości $\hat{\sigma}_{xx}^2$		$3,856469 \cdot 10^{10}$	$6.6072 \cdot 10^8$

Dane z badań zostały wprowadzone do opracowanego programu do numerycznej analizy procesów zmęczeniowych. Dla każdego wyniku badań zostały utworzone serie eksperymentalne. Następnie zostały wyznaczone doświadczalne dystrybuanty trwałości zmęczeniowej DDTZ oraz dwie dystrybuanty trwałości zmęczeniowej z zastosowaniem modelu niestacjonarnego.

Macierz prawdopodobieństw przejść została wygenerowana na dwa sposoby: bez uwzględnienia wpływu interakcji uszkodzeń zmęczeniowych (DTZ 1) oraz z uwzględnieniem wpływu interakcji uszkodzeń (DTZ 2) z zastosowaniem nieliniowej hipotezy kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych Hashina [7]. Otrzymane dystrybuanty zostały przedstawione na rysunkach 3 oraz 4.



Rys. 3. Dystrybuanty trwałości zmęczeniowej dla badania 1



Rys. 4. Dystrybuanty trwałości zmęczeniowej dla badania 2

#### 4. WNIOSKI

W opracowanym oprogramowaniu został zaimplementowany bazujący na włożonych łańcuchach Markowa stacjonarny oraz niestacjonarny model Bogdanowa–Kozina. Wyniki obliczeń dystrybuant za pomocą tego modelu zostały pozytywnie zweryfikowane poprzez dużą zgodność otrzymanych dystrybuant z dystrybuantami uzyskanymi z danych eksperymentalnych oraz przy użyciu modelu Weibulla.

Poprawność działania oprogramowania została dodatkowo zweryfikowana przy użyciu danych z dostępnych w literaturze badań zmęczeniowych wykonanych przez Z.W. Birnbauma i S.C. Saundersa [6]. W tym przypadku zostały porównane dystrybuanty trwałości zmęczeniowej uzyskane za pomocą opracowanego oprogramowania z dystrybuantami dostępnymi w źródłowej pracy. Porównanie to dało wynik pozytywny.

Przy użyciu opracowanego oprogramowania można wyznaczać trwałość zmęczeniową nie tylko dla procesów zmęczeniowych zębów kół walcowych, ale także innych części i zespołów maszyn oraz urządzeń.

Planowana jest dalsza rozbudowa opracowanego oprogramowania o nowe modele zmęczeniowe.

#### LITERATURA

- [1] Kocańda S., Szala J.: *Podstawy obliczeń zmęczeniowych*, PWN, Warszawa 1985.
- [2] Sobczyk K., Spencer B.F. Jr.: *Stochastyczne modele zmęczenia materiałów*, WNT, Warszawa 1992.
- [3] Szala J., Zawiślak S.: *Application of computer simulation method for determination a distribution type of construction parts fatigue life*, Archive of Mechanical Engineering, Vol. 37, 1990, pp. 145-167.



- [4] Poirion F.: *Monte Carlo approach for fatigue and damage calculations of nonlinear dynamical systems*, Conference GAMM 2001, Zurich 2001.
- [5] Benjamin J.R., Cornell C.A.: *Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów*, WNT, Warszawa 1977.
- [6] Bogdanoff J.L., Kozin F.: *Probabilistic Models of Cumulative Damage*, John Wiley & Sons, New York 1985.
- [7] Drewniak J.: *Probabilistyczny model obliczeniowy trwałości zmęczeniowej elementów i zespołów maszyn*, Wydawnictwo Filii PŁ Bielsko-Biała, 1992.
- [8] Valor A. et al.: *Markov chain models for stochastic modelling of pitting corrosion*, Mathematical Problems in Engineering, 2013.
- [9] Hong H.P.: *Application of the stochastic process to pitting corrosion*, 1999.
- [10] Brenna A., Ormellese M., Lazzari L.: *Probabilistic model based on Markov chain for the assessment of localized corrosion of stainless steel*, Conference Corrosion, Texas 2014.
- [11] Mardia K.V. et al.: *Markov chain Monte Carlo implementation of rock fracture modeling*, Math. Geol, 2007, pp. 355-381.
- [12] Chandra T. et al.: *A Markov chain fracture model for inter – granular propagation in polycrystalline materials*, Advanced Material Research, 2010, pp. 29-34.
- [13] Bolanos-Rodriguez E. et al.: *Modelling based on Markov chains for evaluation of pitting corrosion in buried pipelines carrying gas*, 219th ECS Meeting, 2011.
- [14] Caleyó F. et al.: *Markov chain modelling of pitting corrosion in underground pipelines*, Corrosion Science 51, 2009, pp. 2197-2207.
- [15] Hojdys L.: *Numeryczna analiza procesu zmęczenia zębów kół walcowych*, praca magisterska, ATH Bielsko-Biała, 2013.
- [16] Howard R.A.: *Dynamic Probabilistic Systems*, Vol. I, John Wiley & Sons, New York 1971.
- [17] Castillo E., Ramos A., Koller R.: *A critical comparison of two models for assessment of fatigue data*, International Journal of fatigue, 30, 2008.
- [18] Ganesan R.: *A data-driven stochastic approach to model and analyze test data on fatigue response*, Computers and structures, 76, 2000.
- [19] Iosifescu M.: *Skończone procesy Markowa i ich zastosowanie*, PWN, Warszawa 1988.
- [20] Paramanov Y., Andersons J.: *Markov model for analyzing the residual static strength of a fiber-reinforced composites*, Mechanics of composite materials, 44, 2008.
- [21] Rowatt J.D.: *Application of Markov Chains to the Critical Element Model for Determining the Fatigue Life of Composites*, Rice University, 1995.
- [22] Sutherland H.: *On the Fatigue Analysis of Wind Turbines*, Sandia National Laboratories, 1999.
- [23] Tikhonenko O. Matalytski M.: *Procesy stochastyczne*, Akademicka oficyna wydawnicza Exit, 2011.
- [24] Wei B., Johnson S., Haj-Ali R.: *A stochastic fatigue damage method for composite materials based on Markov chains and infrared thermography*, International Journal of Fatigue, 32, 2010.
- [25] Wu W.F., Ni C.C.: *Probabilistic models of fatigue crack propagation and their experimental verification*, Probabilistic Engineering Mechanics, 19, 2004.