

Mgr inż. Jerzy MARSZAŁEK

DOI: 10.17814/mechanik.2015.7.266

Dr hab. inż. Józef DREWNIAK, prof. ATH

Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej

KOMPUTEROWO WSPOMAGANE WYZNACZANIE DYNAMICZNYCH SIŁ MIĘDZYŻĘBNYCH W PRZEKŁADNIACH WALCOWYCH O ZĘBACH PROSTYCH I SKOŚNYCH

Streszczenie: W artykule przedstawiono numeryczną metodę wyznaczania sił dynamicznych w zazębieniu dla dwóch przekładni zębatych o jednakowym przełożeniu geometrycznym. W przypadku pierwszej przekładni zastosowano zęby proste, natomiast w drugiej zęby skośne. Badania symulacyjne przeprowadzono z wykorzystaniem uproszczonego modelu dynamicznego przekładni o zmiennej w czasie sztywności zazębienia. Przebiegi i wartości sztywności wyznaczono metodą analityczną w oparciu o wzory dostępne w literaturze. Badania symulacyjne zostały zrealizowane w programie MATLAB.

COMPUTER AIDED DETERMINATION OF DYNAMIC TOOTH LOADS IN SPUR AND HELICAL GEAR

Abstract: This paper presents a numerical method for the determination of dynamic loads on gear teeth for two gears transmission with the same gear ratio. In the case of the first gear it was used straight teeth, while in the second – helical teeth. The simulation tests were carried out using a simplified dynamic model of gear with time-varying mesh stiffness. Waveforms and stiffness values were determined analytically based on the functions available in the literature. Simulation research have been performed in MATLAB.

Słowa kluczowe: symulacja komputerowa, przekładnia o zębach prostych, przekładnia o zębach skośnych, sztywność zazębienia, współczynnik dynamiczny K_v

Keywords: computer simulation, spur gear, helical gear, mesh stiffness, dynamic factor K_v

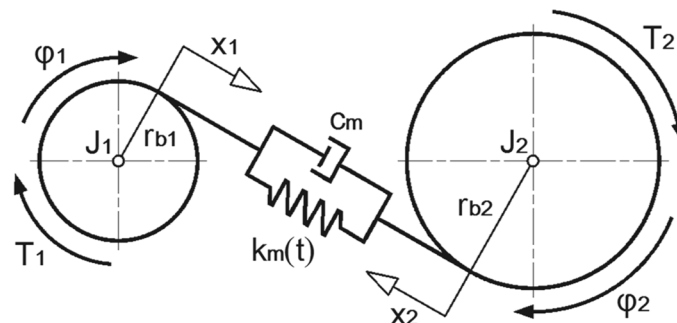
1. WPROWADZENIE

Przekładnie zębate należą do najczęściej wykorzystywanych mechanizmów w układach napędowych maszyn. Z racji dyskretnego przenoszenia obciążenia przez kolejne zęby wchodzące w przypór należą do istotnych źródeł drgań. Przebieg i wielkość tych wibracji wpływają na wartość i rozkład sił międzyzębnych, zmianę naprężeń, a to stanowi przyczynę szybszego zużywania się elementów maszyn. Dlatego przy wyznaczaniu podstawowych parametrów kół zębatych z warunków wytrzymałościowych, tj. modułu normalnego i średnic

podziałowych, należy uwzględniać warunki eksploatacji, czego odzwierciedleniem są rzeczywiste obciążenia. Do tego celu służy współczynnik nadwyżek dynamicznych K_v , za pomocą którego przelicza się nominalne obciążenie statyczne na rzeczywiste obciążenie dynamiczne. Współczynnik K_v można wyznaczyć analitycznie wg obliczeniowych metod B, C przedstawionych w normie ISO 6336 [1] lub przez analizę modelu dynamicznego przekładni wg wymagań metody A.

2. UPROSZCZONY MODEL DYNAMICZNY PRZEKŁADNI ZĘBATEJ

Wyznaczenie wartości współczynnika dynamicznego K_v wg metody A wymaga przyjęcia odpowiedniego modelu dynamicznego. Należy pamiętać, że każdy model stanowi przybliżenie rzeczywistości, a jakość tego przybliżenia zależy od potrzeb wynikających z postawionego zadania. Z uwagi na prowadzenie badań mających sprawdzić wpływ charakteru przebiegu sztywności na wartości sił międzyzębnych przyjęto izolowany model dynamiczny przekładni (rys. 1). Model ten składa się z dwóch kół zębatych o znanych masowych momentach bezwładności J_1 i J_2 oraz promieniach zasadniczych r_{b1} i r_{b2} . Współpracujące zęby są zamodelowane w postaci równoległe połączonych elementów – sprężystego o zmiennej sztywności $k_m(t)$ i tłumiącego c_m . Model dynamiczny jest obciążony momentem wejściowym T_1 i wyjściowym T_2 .



Rys. 1. Uproszczony model dynamiczny przekładni

Dynamiczne równania ruchu dla przyjętego modelu są sformułowane następująco:

$$J_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + k_m(t) \cdot (r_{b1} \cdot \varphi_1 + r_{b2} \cdot \varphi_2) \cdot r_{b1} + c_m \cdot (r_{b1} \cdot \dot{\varphi}_1 + r_{b2} \cdot \dot{\varphi}_2) \cdot r_{b1} = T_1, \quad (1)$$

$$J_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 + k_m(t) \cdot (r_{b1} \cdot \varphi_1 + r_{b2} \cdot \varphi_2) \cdot r_{b2} + c_m \cdot (r_{b1} \cdot \dot{\varphi}_1 + r_{b2} \cdot \dot{\varphi}_2) \cdot r_{b2} = T_2. \quad (2)$$

Podstawowe parametry przekładni są zestawione w tabeli 1. W tabeli 2 zamieszczone są parametry niezbędne do wyznaczenia przebiegów sztywności zazębienia.

Tabela 1. Podstawowe parametry analizowanych przekładni dobrane i obliczone wg [4]

Nazwa	Oznaczenie	Wartość	Jednostka
Liczba zębów zębnika	z_1	26	–
Liczba zębów koła	z_2	53	–
Moduł normalny	m_n	2	mm
Przełożenie geometryczne	u	2,038	–
Kąt zarysu w przekroju normalnym	α_n	20	stopnie
Moc silnika napędowego	P_N	15	kW
Prędkość obrotowa zębnika	n_1	1460	obr/min

Tabela 2. Parametry przekładni wyznaczone wg [4, 5]

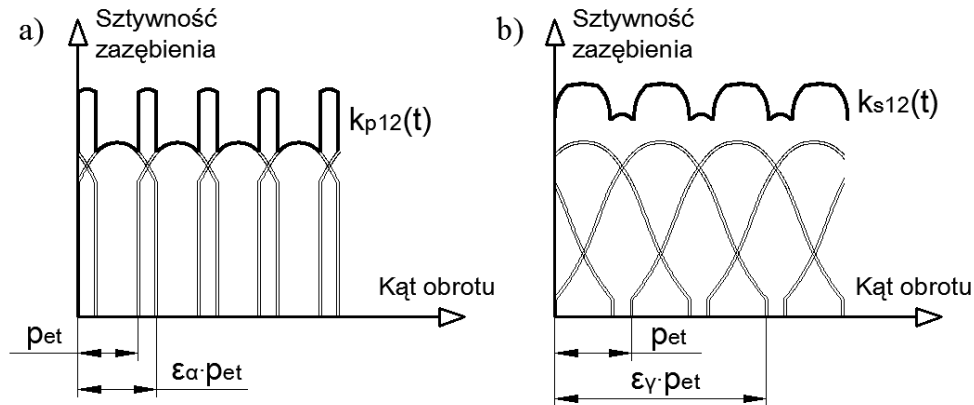
Nazwa	Oznaczenie	Wartość parametru		Jednostka
		Przekładnia o zębach prostych	Przekładnia o zębach skośnych, $\beta = 13^\circ$	
Zerowa odległość osi	a_d	79	81,078	mm
Rzeczywista odległość osi	a	80	82	mm
Współczynnik przesunięcia zarysu zębniaka	x_1	0,331	0,311	–
Współczynnik przesunięcia zarysu koła	x_2	0,192	0,171	–
Czołowa podziałka przyporu	p_{et}	5,904	6,041	mm
Czołowy wskaźnik zazębienia	ε_α	1,559	1,378	–
Poskokowy wskaźnik zazębienia	ε_β	0	1,504	–
Wskaźnik zazębienia całkowity	ε_γ	1,559	2,882	–

2.1. Wyznaczenie sztywności zazębienia

Przekładnie zębate z uwagi na przenoszone obciążenie przez kolejne zęby wchodzące w przypór należą do istotnych źródeł drgań. Okresowo zmienna liczba zębów w przyporze jest przyczyną okresowej fluktuacji sztywności zazębienia i w związku z tym stanowi istotny czynnik wewnętrzny mający wpływ na przebieg sił dynamicznych w przekładni. Wartość i przebieg sztywności zazębienia zależy od wielu parametrów, m.in. liczby zębów, zarysu odniesienia, kąta pochylenia linii zęba, czołowego wskaźnika zazębienia, długości podziałki czołowej i odcinka przyporu [6].

Sztywność jednej pary zębów zmienia się wzdłuż odcinka przyporu, a więc z kątem obrotu koła. Maksymalna wartość sztywności występuje przy środkowym położeniu linii styku. W skrajnych położeniach odpowiadających przyporowi głowy i stopy zęba sztywność jest najmniejsza.

Współpraca dwóch kół zębatach o zazębieniu normalnym (czyli w przypadku gdy $1 < \varepsilon_\alpha < 2$) charakteryzuje się występowaniem jednoparowego i dwuparowego zazębienia na odcinku przyporu (rys. 2a). Przebieg sztywności dla jednej pary zębów prostych można w przybliżeniu sprowadzić do paraboli. Sztywność zazębienia jednej pary zębów zmienia się bardziej w zazębieniu skośnym (rys. 2b) niż w zazębieniu prostym. Zwiększa się ona wraz z wydłużeniem się linii styku i jest największa, gdy linia styku rozciąga się na całej szerokości zęba. W zazębieniu skośnym są na ogół zawsze więcej niż dwie pary zębów w przyporze (odpowiednio do większego całkowitego wskaźnika zazębienia). Wskutek tego całkowita sztywność zazębienia skośnego waha się mniej niż w zazębieniu prostym i może być przyrównana w przybliżeniu do przebiegu sinusoidalnego [5, 6].



Rys. 2. Przebieg sztywności zążeń: a) dla zębów prostych, b) dla zębów skośnych [5]

Funkcja przebiegu sztywności jednej pary zębów [3] dla zążeń prostego (rys. 3) jest wyrażona wzorem:

$$k_p(t) = \frac{k_p'}{0,85 \cdot \epsilon_{\alpha}} \cdot \left(-\frac{1,8 \cdot t^2}{(t_z \cdot \epsilon_{\alpha})^2} + \frac{1,8 \cdot t}{t_z \cdot \epsilon_{\alpha}} + 0,55 \right) \quad (3)$$

Funkcja przebiegu sztywności jednej pary zębów [2] dla zążeń skośnego (rys. 3) jest określona wzorem:

$$k_s(t) = k_s' \cdot \exp\left(C_{\beta} \cdot |s(t)|^3\right) \quad (4)$$

Funkcja określająca położenie punktu zążeń wzdłuż linii przyporu [2] wynosi:

$$s(t) = \frac{2 \cdot m_n}{\epsilon_{\alpha} \cdot t_z \cdot h} \left(t - \frac{\epsilon_{\gamma} \cdot t_z}{2} \right) \quad (5)$$

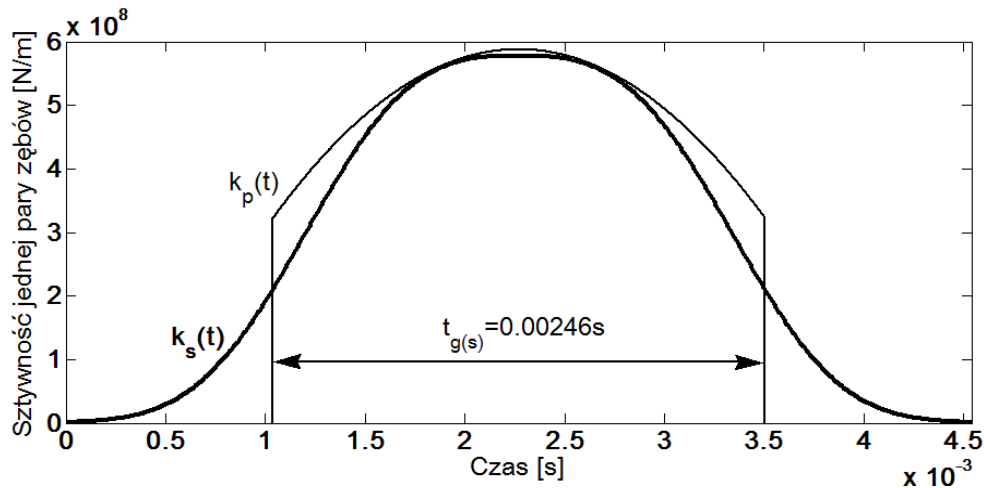
gdzie t_z jest okresem zmian sztywności zążeń mierzonym od momentu wejścia zęba w przypór aż do momentu wyjścia z przyporu (t - czas [s]).

Stała C_{β} jest zależna od kąta pochylenia linii zębów β_0 , szerokości wieńca zębatego b oraz wysokości zębów h :

$$C_{\beta} = 0,322 \cdot (\beta_0 - 5) + \left[0,23 \cdot \frac{b}{h} - 23,26 \right] \quad (6)$$

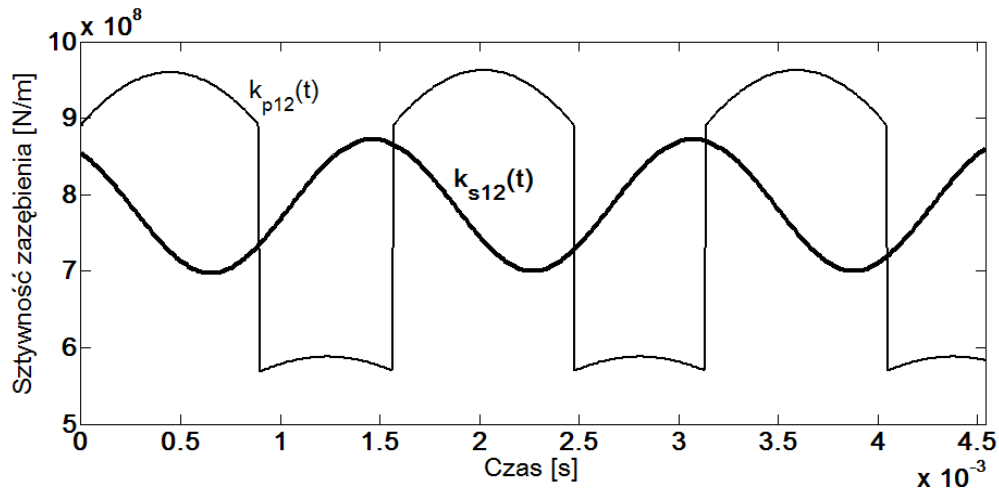
W powyższych funkcjach (3) i (4) znajdują się wielkości określające wartości sztywności pojedynczych par zębów. Zostały one wyznaczone za pomocą wzorów dostępnych w literaturze [1, 2] i odpowiednio wynoszą:

- dla zębów prostych: $k_p' = 758 \cdot 10^8$ N/m,
- dla zębów skośnych: $k_s' = 577 \cdot 10^8$ N/m.



Rys. 3. Przebiegi sztywności pojedynczych par zębów wg wzorów (3) i (4)

Sumaryczny przebieg sztywności zazębienia definiuje się jako wypadkową z równoległego połączenia zmiennych sztywności pojedynczych par zębów (rys. 4).



Rys. 4. Wypadkowe przebiegi sztywności

W równaniach dynamicznych (1) i (2) wypadkowa sztywność zazębienia oznaczona jest w postaci ogólnej jako $k_m(t)$. Dla zębów prostych sztywność ta przyjmuje symbol $k_{p12}(t)$, natomiast dla zębów skośnych $k_{s12}(t)$.

2.2. Wyznaczenie masowych momentów bezwładności kół zębatych

Masowy moment bezwładności koła zębatego można wyznaczyć korzystając z programu modelowania 3D, jakim jest np. Autodesk Inventor. Dysponując modelem koła zębatego można bezpośrednio odczytać w programie masowe momenty bezwładności względem wszystkich osi koła, masę, środek ciężkości i objętość koła zębatego. Można zatem przyjąć, że masowe momenty bezwładności wynoszą:

- dla zębownika: $J_1 = 0,00024 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$,
- dla koła: $J_2 = 0,00404 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

2.3. Międzyzębna siła dynamiczna

Współczynnik dynamiczny K_v oblicza się wg zależności:

$$K_v = \frac{F_{c\max}}{F_{bn}}, \quad (7)$$

gdzie:

F_{bn} – nominalna wartość siły międzyzębnej wg [5], [N],

$F_{c\max}$ – maksymalna siła międzyzębna wynikająca z drgań przekładni [N].

Siła międzyzębna wyznaczana jest ze wzoru:

$$F_c = k_m(t) \cdot x \quad (8)$$

Przemieszczenie względne wzdłuż linii przyporu x [m] dla przyjętego modelu dynamicznego (rys. 1) oblicza się ze wzoru:

$$x = x_1 + x_2 \quad (9)$$

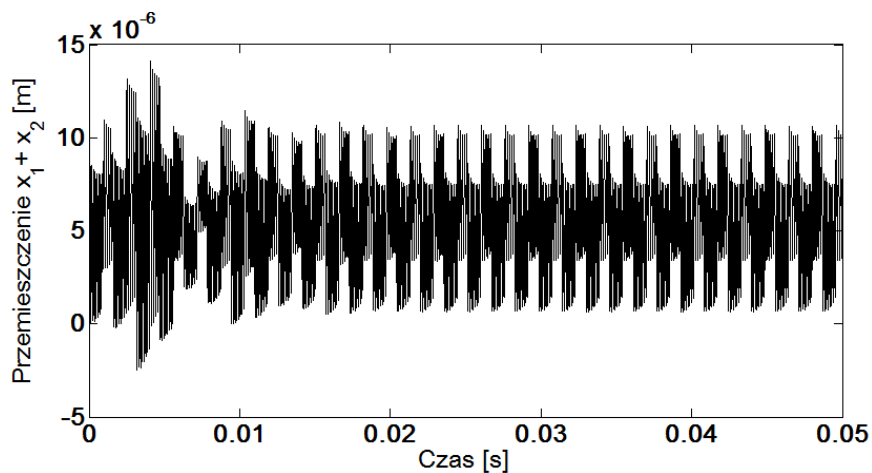
$$x_1 = r_{b1} \cdot \varphi_1 \quad (10)$$

$$x_2 = r_{b2} \cdot \varphi_2 \quad (11)$$

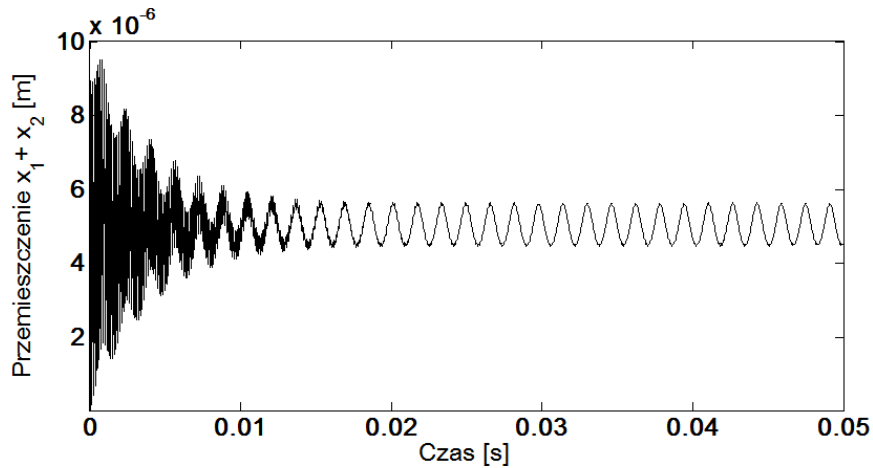
przy czym φ_1 i φ_2 [rad] są wychyleniami kątowymi kół zębatych.

3. WYNIKI ANALIZY NUMERYCZNEJ

Rozwiązaniem dynamicznych równań ruchu (1) i (2) są przebiegi drgań x wzdłuż linii przyporu w funkcji czasu (rys. 5, rys. 6).



Rys. 5. Przemieszczenie x wzdłuż linii przyporu dla przekładni o zębach prostych

Rys. 6. Przemieszczenie x wzdłuż linii przyporu dla przekładni o zębach skośnych

Nominalne wartości sił międzyzębnych dla analizowanych przekładni wyznaczone wg [5] wynoszą:

- dla przekładni o zębach prostych: $F_{bn} = 4016,05 \text{ N}$,
- dla przekładni o zębach skośnych: $F_{bn} = 4016,05 \text{ N}$.

Maksymalne siły międzyzębne wynikające z drgań obliczone ze wzoru (8) wynoszą:

- dla przekładni o zębach prostych: $F_{cmax} = 5742,95 \text{ N}$,
- dla przekładni o zębach skośnych: $F_{cmax} = 4228,9 \text{ N}$.

Korzystając ze wzoru (7), obliczono wartości współczynników dynamicznych K_v . Oprócz tego współczynniki te dla analizowanych przekładni zębatych zostały wyznaczone także wg metody inżynierskiej B zgodnie z normą ISO 6336. Wyniki obliczeń są przedstawione w tabeli 3.

Tabela 3. Wartości współczynnika K_v wyznaczone wg dwóch różnych metod

Analizowana przekładnia	Metoda wyznaczania współczynnika K_v	
	Analiza modelu dynamicznego	Metoda B wg normy ISO 633
Przekładnia o zębach prostych	1,43	1,172
Przekładnia o zębach skośnych	1,053	1,091

4. WNIOSKI

Norma ISO 6336 zaleca, aby współczynnik dynamiczny K_v wyznaczać wg najdokładniejszej metody A. W tym celu należy przyjąć odpowiedni model dynamiczny przekładni, czyli powinno dążyć się do tego, aby model w możliwie największym stopniu przybliżał pracę przekładni. Uproszczony model dynamiczny (rys. 1) nie uwzględnia podatności łożysk, drgań skrętnych wałów oraz czynników zewnętrznych związanych z układem napędowym, natomiast w przeciwieństwie do analitycznej metody B wprowadza zmienną w czasie

sztynność ząbienia. We wstępnych obliczeniach projektowych przekładni zębatych zaleca się stosowanie współczynnika dynamicznego o wartości $K_v \cong 1,15$ [4]. Jednak z analizy dynamicznej wynika, że w przypadku badanej przekładni o zębach prostych wartość tego współczynnika jest większa i dlatego powinno się ją uwzględnić w obliczeniach wstępnych. W celu potwierdzenia wiarygodności wyników otrzymanych z symulacji komputerowej należałoby przeprowadzić badania np. drgań kątowych i poprzecznych wałów na rzeczywistym obiekcie.

LITERATURA

- [1] Norma ISO 6336-1:2006 *Przekładnie zębate walcowe. Obliczanie nośności kół. Podstawowe zasady i ogólne czynniki wpływające.*
- [2] Cai Y.: *Simulation on the rotational vibration of helical gears in consideration of the tooth separation phenomenon (a new stiffness function of helical involute tooth pair)*, Transaction of ASME, "Journal of Mechanical Design", 117/1995, 460-469.
- [3] Cai Y., Hayashi T.: *The Linear Approximated Equation of Vibration of a Pair of Spur Gears (Theory and Experiment)*, "Journal of Mechanical Design", Tokyo, 1994.
- [4] Drewniak J.: *Projektowanie kół zębatych walcowych, stożkowych i ślimakowych wg norm ISO*, Wydawnictwo ATH, Bielsko-Biała, 2009.
- [5] Jaśkiewicz Z., Wąsiewski A.: *Przekładnie walcowe. Geometria, wytrzymałość, dokładność wykonania*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 1992.
- [6] Marszałek J.: *Analiza dynamiki walcowej przekładni zębatej*, praca dyplomowa magisterska, Akademia Techniczno-Humanistyczna, Bielsko-Biała, 2014.