

Prof. dr hab. inż. Jan B. OBREŃBSKI

DOI: 10.17814/mechanik.2015.7.275

Emerytowany profesor zwyczajny Politechniki Warszawskiej

## STATECZNOŚĆ PRĘTÓW PROSTYCH W ŚWIETLE OBLICZONYCH PRZYKŁADÓW

*Streszczenie: Praca bazuje na teorii opracowanej przez autora. Podano w niej liczne wnioski wynikające z bardziej istotnych przykładów znanych z literatury oraz z obliczeń własnych, poprzednich i nowych, poszerzających wiedzę w tym zakresie. Przebadano osiemnaście prętów o sześciu różnych, lecz nieco podobnych co do wielkości przekrojach i mających po trzy długości. Pokazano określone dla nich zamknięte linie krzywe nazwane przez Własowa izostabami. Te ostatnie są zbiorami punktów, gdzie siła podłużna o danej wartości ustawiona mimośrodowo powoduje utratę stateczności. Rodzina takich linii tworzy obraz pewnych nowych izopowierzchni krytycznych. Wyniki uzupełniają wykresy izostab Własowa określonych dla sił o nieskończonych wielkościach i ich wpływ na wykresy obciążeń krytycznych pręta przy mimośrodowym działaniu. Nawiązano też do przedstawianych poprzednio granicznych powierzchni krytycznych pręta. Całość tych badań poszerza wiedzę na temat wieloparametrowego charakteru utraty stateczności prętów prostych.*

## INSTABILITY OF STRAIGHT BARS IN THE LIGHT OF CALCULATED EXAMPLES

*Abstract: The paper is based on own theory. It gives numerous conclusions following from more important examples known from literature and from own calculations, previous and new, extending the knowledge in this domain. There were investigated eighteen bars with six a little similar with regard to magnitude cross-sections, having for each three lengths. There, were shown closed curves called by Vlasov as izostaba. The lasts are the set of points of eccentric force positions with given value, inducing bar instability. Family of such lines is forming picture of certain new critical izo-surfaces. Presented results are completed by diagrams of Vlasov's izostabs determined for forces with infinite value and its influence on graphs of critical eccentric forces. There, are given comparisons to ultimate critical surfaces for the same bars, presented previously. All these investigations extend knowledge about multi-parametrical character of instability of straight bars with any cross-sections.*

*Słowa kluczowe: dowolne pręty proste, powierzchnie krytyczne, izostaby*

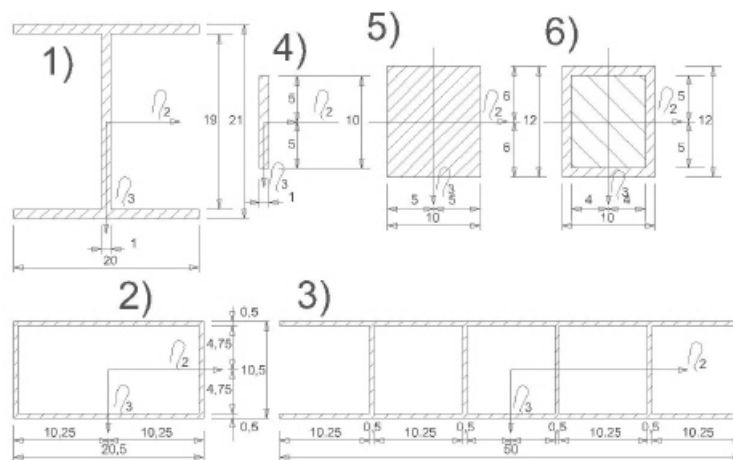
*Keywords: any straight bars, critical loadings and surfaces, izostaba lines*

### 1. WPROWADZENIE

Zjawisko utraty stateczności różnego rodzaju konstrukcji jest od wielu lat przedmiotem badań. Dotyczy to skomplikowanych przestrzennych struktur prętowych, płyt, powłok, a nawet pojedynczych prętów. Najczęściej są to obiekty jednorodne, wykonane z jednego materiału. W ostatnich latach autor, wykorzystując możliwości swojej teorii, wykonał szereg przykładów

porównawczych dla prętów kompozytowych, a więc zawierających więcej niż z jeden materiał [5-9, 11, 12-18, 20, 23, 25-29]. Ma to na celu lepsze poznanie ich zachowania w zakresie mechaniki i wytrzymałości. Część z tych prac dotyczyła utraty stateczności. Istotną rolę odgrywa tu skręcanie, nągminnie pomijane w procesie projektowania. Autor krok po kroku wykazał [1-34], że analiza mechaniczna i wytrzymałościowa prętów o dowolnych przekrojach pełnych i cienkościennych oraz kompozytowych powinna przebiegać w identyczny sposób. Równania równowagi każdego rodzaju pręta są identyczne dla obranego rodzaju analizy (statyka, dynamika itd.). Natomiast obliczanie potrzebnych tam charakterystyk geometrycznych także związanych z deplanacją przekrojów spowodowaną skręcaniem, masowych i dla interakcji z otaczającym ośrodkiem (np. oddziaływanie gruntu) może być mniej lub bardziej skomplikowane. W konsekwencji dla każdego rodzaju przekroju pręta można dość precyzyjnie obliczyć położenia środka ścinania, momenty skręcające oraz związane z nimi siły przekrojowe. W efekcie wyznaczmy odpowiednie naprężenia wycinkowe zarówno normalne, jak i styczne, osiągające bardzo duże wartości [27]. Szczególnie ciekawe rezultaty osiąga się tu w zakresie utraty stateczności prętów prostych.

W obecnej pracy wykonano obliczenia porównawcze dla serii osiemnastu prętów mających sześć różnych przekrojów poprzecznych – dla każdego z nich po trzy długości. Przekroje są podobne do siebie jedynie co do wielkości. Trzy z nich są cienkościenne otwarte lub zamknięte, pełne i kompozytowe, o większym momencie bezwładności względem osi poziomej lub pionowej – rys. 1. Dla wszystkich tych prętów wykorzystano te same wzory, obliczając tradycyjne giętne siły krytyczne Eulera i skrętne Wagnera oraz siły krytyczne uwzględniające wyboczenie giętno-skrętne, gdy mimośrodkowe obciążenie podłużne zmienia swoją pozycję na pionowej osi symetrii przekroju.



Rys. 1. Analizowane przekroje

W ten sposób otrzymano także *izostaby* dla szeregu wartości sił ściskających, co w efekcie dało obrazy nowego rodzaju – *izopowierzchnie krytyczne*, które porównano z *izostabami* Własowa [30], otrzymanymi dla sił o nieskończonych wartościach. Całość rozważań odniesiono do wykresów *granicznych powierzchni krytycznych* otrzymanych dla prętów poddanych działaniu siły podłużnej i momentów zginających prezentowanych w poprzednich pracach autora w roku ubiegłym, w tym częściowo podczas XVIII Szkoły w Szczyrku [28, 29].

Jak wynika z powyższych informacji, utratę stateczności pręta można zilustrować na kilka sposobów. Każdy z nich przedstawia to dość enigmatyczne zjawisko w innym świetle.

Omówione powyżej obliczenia przeprowadzono za pomocą programu MS Excel. Przy okazji zwrócono uwagę na dokładność obliczeń.

## 2. OPIS ANALIZOWANYCH BELEK

Przekroje analizowanych belek wzięto z poprzednich prac autora [5, 10, 25-29] i pokazano je na rys. 1. Wartości ich charakterystyk geometrycznych obliczone we wspomnianych pracach podano w tablicy 1: dla dwuteownika [5, 11] przedstawiono je w dwóch wersjach obliczone dokładnie metodami wytrzymałości materiałów (typ 1) i obliczone za pomocą całek Mohra (CM) (1a), przekrój skrzynkowy [5, 11] (typ 2), trójobwodowy [5] (typ 3), jednorodny przekrój prostokątny i kompozytowy [25-29] typu (5 i 6) oraz prostokątny przekrój jednorodny z książki Własowa [30] (typ 4). Wszystkie przekroje są bisymetryczne, co znacznie uprościło obliczenia. Dla pręta o danym przekroju przyjęto trzy długości:  $l = 200, 400$  i  $600$  cm.

We wszystkich przypadkach przyjęto, że trzy funkcje przemieszczeń osi pręta są swobodnie ograniczone na końcach (swobodne podparcie).

Tablica 1. Ważniejsze dane dotyczące analizowanych belek

Typ przekroju	Opis przekroju	$\bar{A}$	$\bar{I}_2$	$\bar{I}_3$	$\bar{I}_\phi$	$\delta$	$\bar{E} = E_1$	$K_s$
		cm <sup>2</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>6</sup>	cm	kN/cm <sup>2</sup>	kN cm <sup>2</sup>
1	Dwuteownik – dokładnie	59	4574,91	1334,91	133333	1	22527,47	160000
1a	Dwuteownik CM	60	4666,66	1333,33	133000	1	22527,47	160000
2	Skrzynkowy	30	583,33	1666,66	2777,77	0,5	22527,47	10666666
3	Trójobwodowy	70	1417,70	12926,66	32608,50	0,5	22527,47	14348555
4	Prostokąt Własowa	10	83.333	0.833	0	1	20500	26666,66
5	Prostokąt jednorodny 10 x 12	120	1440	1000	145,09	1	20500	13929133
6	Prostokąt kompozytowy 10 x 12	43.902	805,85	594,15	84,49	1	20500	7888746

Przekroje typu 1 do 5 są jednorodne i wykonane ze stali (z modułem Younga  $E = 205$  GPa). Natomiast przekrój typu 6 zawiera stal (z modułem Younga  $E = 205$  GPa) i drewno ( $E = 10$  GPa). Przekroje dobrano tak, aby były możliwe łatwe porównania wyników. Do obliczenia charakterystyk geometrycznych dla przekroju pełnego typu 5 i kompozytowego typu 6 – zbudowanego z dwóch materiałów – zastosowano modelowanie pręta jako zespołu przyrządczych rur cienkościennych, umieszczonych szczelnie jedna w drugiej. Tablica 1 zawiera sprowadzone charakterystyki geometryczne przekrojów odniesione do sprowadzonego modułu Younga  $\bar{E}$  (patrz [5, 11, 25-29]).

## 3. JEDNOLITE KRYTERIUM UTRATY STATECZNOŚCI I GEOMETRYCZNEJ ZMIENNOŚCI KONSTRUKCJI

Autor doszedł do wniosku, że łącznie dla zagadnień utraty stateczności oraz dla oceny geometrycznej niezmienności dowolnych konstrukcji, w tym pojedynczych prętów, płyt, powłok i układów konstrukcyjnych zbudowanych z wielu takich i innych elementów, można stosować to samo jednolite kryterium o postaci [10, 16, 19, 21]:

$$f(P, \omega, v, a, M, m, d, t) = \det[W(P, \omega, v, a, M, m, d, t)] = 0, \quad (1)$$

gdzie  $W$  jest głównym wyznacznikiem układu równań opisujących stan równowagi konstrukcji. Natomiast pozostałe symbole oznaczają uogólniony system obciążeń zewnętrznych, częstość drgań własnych, prędkość i przyspieszenie obciążenia, poruszającą się po obiekcie masę, tłumienie i czas. Wyznacznik mogą tworzyć równania różniczkowe (Euler), różnicowe, macierze sztywności ułożone Metodą Różnic Skończonych lub Metodą Elementów Skończonych, zarówno dla statyki, jak i dynamiki, w tym dla teorii pierwszego i drugiego rzędu, ewentualnie inne. Zerowanie się wartości takiego wyznacznika oznacza geometryczną zmienność układu konstrukcyjnego lub jego utratę stateczności. Tak skonstruowane kryterium może zależeć od wielu następujących parametrów: kształtu przekroju, warunków brzegowych, stosowanych materiałów, symetrii lub bisymetrii przekroju i zapewne wielu innych.

Dla potrzeb przebadania utraty stateczności prętów prostych o długości  $l$  rozpatrywanych w tej pracy jednolite kryterium (warunek (1)) jest zapisane jak niżej [5, 11]:

$$f(P) = \det [W(P)] = \det \begin{bmatrix} (P - P_3) & 0 & d_1 \\ 0 & (P - P_2) & d_2 \\ A_2 d_1 & A_3 d_2 & A_1 r^2 (P - \bar{P}_\omega) \end{bmatrix} = 0, \quad (2)$$

gdzie zakładając mimośrodowe przyłożenie siły podłużnej, napiszemy:

$$d_1 = M_2 + P\eta_{3A} = M_2 - P\eta_{3P} + P\eta_{3A} = M_2 + P(\eta_{3A} - \eta_{3P}) \quad \text{oraz} \quad d_2 = M_3 - P\eta_{2A}$$

$$P_2 = \bar{E}\bar{I}_2 A_3 (\alpha_n)^2 = \frac{\pi^2 A_3 \bar{E} \bar{I}_2}{l^2}, \quad P_3 = \bar{E} \bar{I}_3 A_2 (\alpha_n)^2 = \frac{\pi^2 A_2 \bar{E} \bar{I}_3}{l^2}, \quad (3)$$

$$\bar{P}_\omega = \frac{1}{r^2} \left[ \bar{E} \bar{I}_\omega A_1 (\alpha_n)^2 + K_s - 2\beta_2 M_3 + 2\beta_3 M_2 + 2\beta_\omega B \right], \quad (4)$$

$$\text{lub } \bar{P}_\omega = P_\omega + \frac{1}{r^2} \left[ -2P\eta_{2P}\beta_2 - 2P\eta_{3P}\beta_3 + 2\beta_\omega B \right] \quad \text{oraz} \quad P_\omega = \frac{1}{r^2} \left[ \bar{E} \bar{I}_\omega A_1 (\alpha_n)^2 + K_s \right]. \quad (5)$$

W powyższych wzorach oznaczono:

- $\alpha_n = n\pi/l$  oraz dla pierwszych (najmniejszych) siły krytycznych przyjęto  $n = 1$ ,
- $\bar{E}$  – sprowadzony moduł Younga przyjęty dla całego przekroju (tu dla stali),
- $A_i$  – współczynniki definiujące warunki brzegowe pręta (w naszych zadaniach  $A_i = 1$  dla  $i = 1, 2, 3$ ),
- $\bar{I}_2, \bar{I}_3$  – sprowadzone momenty bezwładności przekroju liczone względem głównych sprowadzonych osi środkowych przekroju  $\eta_2$  i  $\eta_3$ ,
- $\bar{I}_\omega$  – sprowadzony wycinkowy moment bezwładności przekroju,
- $M_2, M_3, B$  – siły przekrojowe: momenty zginające liczone względem osi  $\eta_2$  i  $\eta_3$  oraz bimoment – liczone względem początkowej nieodkształconej konfiguracji pręta,
- $N$  – podłużna siła rozciągająca przyłożona na końcach całego pręta (zobacz [2], s. 233, równanie (9.29)),
- $\eta_{2A}, \eta_{3A}$  – współrzędne bieguna głównego przekroju (w teorii pierwszego rzędu identycznego ze środkiem ścinania),
- $\eta_{2P}, \eta_{3P}$  – współrzędne punktu przyłożenia siły podłużnej  $P$ .

Ponadto, w ogólnym przypadku, wykorzystując układ główny [5], cztery wielkości występujące w powyższym warunku (2) i w (4) oblicza się ze wzorów:

$$\beta_2 = \frac{1}{2\bar{I}_3} \left[ \oint (\eta_2)^3 d\bar{A} + \oint (\eta_3)^2 \eta_2 d\bar{A} \right] - \eta_{2A} = \frac{1}{2\bar{I}_3} \oint \eta_2 \rho^2 d\bar{A} \quad (6)$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2\bar{I}_2} \left[ \oint (\eta_3)^3 d\bar{A} + \oint (\eta_2)^2 \eta_3 d\bar{A} \right] - \eta_{3A} = \frac{1}{2\bar{I}_2} \oint \eta_3 \rho^2 d\bar{A} \quad (7)$$

$$\beta_{\hat{\omega}} = \frac{1}{2\bar{I}_{\hat{\omega}}} \left[ \oint (\eta_2)^2 \hat{\omega} d\bar{A} + \oint (\eta_3)^2 \hat{\omega} d\bar{A} \right] = \frac{1}{2\bar{I}_{\hat{\omega}}} \oint \hat{\omega} \rho^2 d\bar{A} \quad , \quad (8)$$

$$r^2 = \frac{\bar{I}_2 + \bar{I}_3}{A} + (\eta_{2A})^2 + (\eta_{3A})^2 \quad . \quad (9)$$

Oznaczono tu  $\rho^2 = (\eta_2)^2 + (\eta_3)^2$ , gdzie  $\rho$  jest długością promienia wodzącego położenia elementarnej sprowadzonej powierzchni  $d\bar{A}$ . Z tego powodu jest to wielkość zawsze dodatnia. Dla przekrojów bisymetrycznych, gdzie biegun główny pokrywa się z początkiem głównych sprowadzonych osi bezwładności przekroju,  $\eta_{2A} = \eta_{3A} = 0$  i powyższe wielkości bardzo się upraszczają:

$$r^2 = \frac{\bar{I}_2 + \bar{I}_3}{A}, \quad \beta_2 = \beta_3 = \beta_{\hat{\omega}} = 0. \quad (10)$$

Tak postawione zadanie autor analizował na wiele sposobów, z których wymienione są tu tylko następujące:

- Dla siły ustawionej osiowo (zadanie Eulera).
- Poszukiwanie obciążenia krytycznego przy wytrzymałości złożonej (siła podłużna i dwa momenty zginające w dowolnej proporcji), co prowadzi do wyznaczenia *granicznej powierzchni krytycznej*. Zadanie to rozpatrzono na poprzedniej konferencji [29]. Bezpieczne konfiguracje wymienionych obciążeń znajdują się wewnątrz takiej powierzchni.
- Wspornik obciążony krytycznym obciążeniem ciągłym (na zlecenie przemysłu) [1, 24].
- Obciążenie krytyczne mimośrodową siłą działającą na osi symetrii przekroju (patrz rozdział 8).
- Poszukiwanie izostab dla pręta o danej długości i warunkach brzegowych oraz przy mimośrodowo działającej sile podłużnej o konkretnej wartości. Zespół takich *izostab* daje *izopowierzchnię krytyczną* (patrz rozdział 7). Stany krytyczne występują tylko na takiej powierzchni.

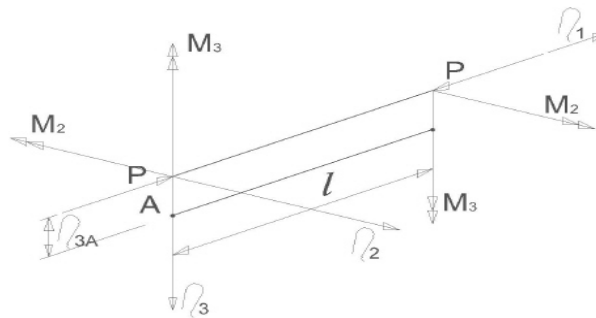
#### 4. SIŁY KRYTYCZNE WEDŁUG EULEA I WAGNERA

Przy osiowym ustawieniu podłużnej siły ściskającej  $P$  warunek (1) spełniają trzy tradycyjne siły (3) do (5), (ponieważ wtedy  $d_1 = d_2 \equiv 0$ ). Dwie z nich,  $P_2$  i  $P_3$ , są krytycznymi siłami giętnymi Eulera, a trzecia  $P_{\omega}$  powoduje wyboczenie skrętne Wagnera. Najmniejsza z nich jest obciążeniem krytycznym: dla rozpatrywanych belek o przyjętych przekrojach obliczone wartości tych sił zestawiono w tabelicy 3. W tej tabelicy pogrubionym drukiem wyróżniono najmniejsze z tych trzech sił, a więc obciążenie krytyczne przy osiowym ustawieniu siły podłużnej.

## 5. UTRATA STATECZNOŚCI PRĘTA PRZY WYTRZYMAŁOŚCI ZŁOŻONEJ

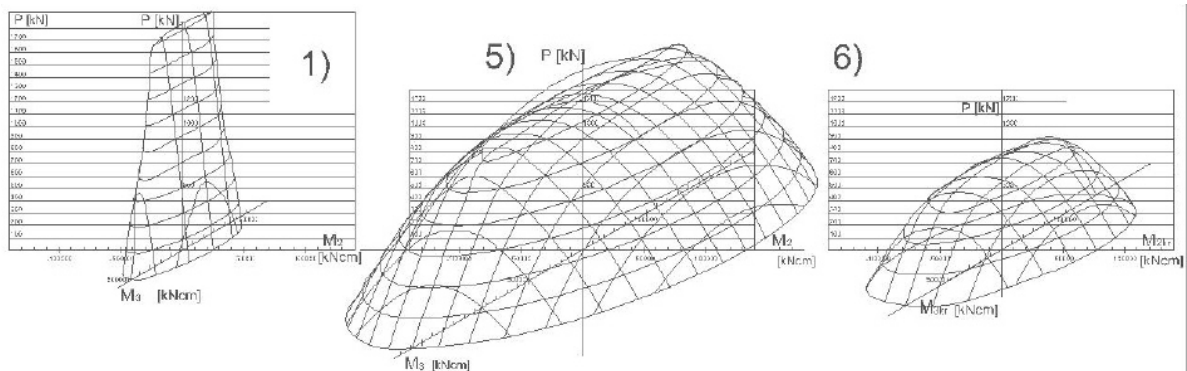
Zagadnienie to rozpatrywano m.in. w pracy autora przedstawionej podczas obrad poprzedniej XVIII Szkoły w Szczyrku [29]. Podano tam obszerne wyprowadzenia dla pręta obciążonego siłą podłużną i momentami zginającymi działającymi w płaszczyznach głównych jego przekroju, rys. 2. Statyczną analizę utraty stateczności przeprowadzono dla belki o długości  $l = 400$  cm, rys. 2. Miała ona wariantowo siedem różnych przekrojów prostokątnych, o wysokości 12 cm, oraz ósmy był dwuteownikiem (rys. 1, typ 1). Z uwagi na założone już w tytule pracy analizy porównawcze, wariantowano następujące parametry zadania:

- stosowano dwa schematy pręta – swobodne podparcie i wspornik,
- belki obciążano jednocześnie siłami podłużnymi działającymi osiowo lub z mimośrodem i momentami zginającymi,
- obciążeniom zewnętrznym – siłom skupionym i momentom zginającym – nadawano różne wartości (proporcje),
- stosowano osiem różnego typu przekrojów poprzecznych belek,
- pięć przekrojów modelowano na dwa sposoby, aby określić: położenie środka ścinania, współrzędne wycinkowe (funkcji deplanacji przekroju), wycinkowy moment bezwładności oraz sztywności na skręcanie przekrojów.



Rys. 2. Schemat pręta obciążonego siłą podłużną i momentami zginającymi

Wszystkie obliczenia przeprowadzono na podstawie dokładnych wzorów wyprowadzonych analitycznie, przy wsparciu programu MS Excel (patrz rozdz. 10 i 11). W efekcie wyznaczono graniczne powierzchnie krytyczne, pokazane tu dla przekrojów typu 1, 5 i 6, na rys. 3.



Rys. 3. Graniczne powierzchnie krytyczne dla prętów o długości 400 cm i o przekrojach 1, 5, 6. Obszar bezpieczny znajduje się wewnątrz tej powierzchni

Inne zadanie, wykonane na zamówienie, dotyczyło sprawdzenia możliwości utraty stateczności przez słupy wsporcze ekranów akustycznych autostradowej obwodnicy Wrocławia [24]. Tam otrzymane obciążenia krytyczne obliczone teoretycznie, z dużą dokładnością potwierdzono doświadczalnie [1].

## 6. RÓWNANIA IZOSTABY DLA PRĘTÓW OBCIĄŻONYCH MIMOŚRODOWO

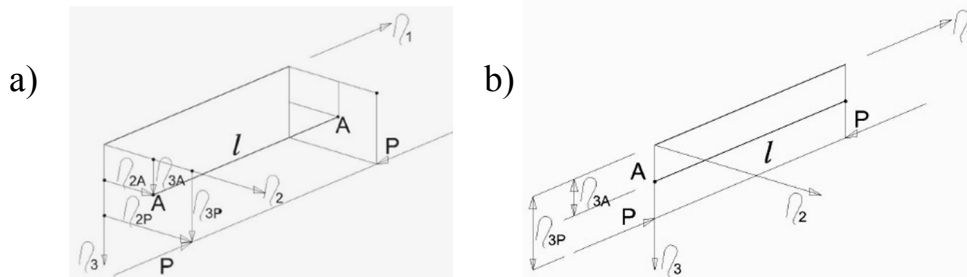
Izostaba zgodnie z definicją podaną przez Własowa jest linią określającą zbiór punktów ustawienia mimośrodowego siły podłużnej o danej wartości, powodującej utratę stateczności pręta. Zadanie takie definiuje rys. 4a. W tym przypadku główny wyznacznik trzech równań różniczkowych pręta (2) po przyjęciu

$$d_1 = P(\eta_{3A} - \eta_{3P}) \quad \text{oraz} \quad d_2 = P(\eta_{2P} - \eta_{2A}) \quad (11)$$

oraz bez zmian (3) i (4), przyrównany do zera, daje następujące równanie:

$$W(P) = -(P - P_2) \cdot (P - P_3) A_1 \left[ r^2 (P_\omega - P) - 2P(\beta_2 \eta_{2P} + \beta_3 \eta_{3P}) + 2\beta_\omega P \Omega^* \right] + \quad (12)$$

$$- P^2 A_2 (P - P_2) \cdot (\eta_{3A} - \eta_{3P})^2 - P^2 A_2 (P - P_2) \cdot (\eta_{3A} - \eta_{3P})^2 - P A_3 (P - P_3) \cdot (\eta_{2P} - \eta_{2A})^2 = 0$$



Rys. 4. Schemat pręta obciążonego mimośrodowo siłą podłużną a) i szczególny przypadek, gdy siła ta działa na osi symetrii przekroju b)

Jeśli pomnożymy równanie (12) przez  $P^2$ , to otrzymamy:

$$-\frac{A_3(\eta_{2A} - \eta_{2P})^2}{\left(\frac{P_2}{P} - 1\right) \cdot \left(\frac{P_\omega}{P} - 1\right)} - \frac{A_2(\eta_{3A} - \eta_{3P})^2}{\left(\frac{P_3}{P} - 1\right) \cdot \left(\frac{P_\omega}{P} - 1\right)} - \frac{2A_1\beta_2\eta_{2P}}{\frac{P_\omega}{P} - 1} - \frac{2A_1\beta_3\eta_{3P}}{\frac{P_\omega}{P} - 1} + \frac{2A_1\beta_\omega\Omega^*}{\frac{P_\omega}{P} - 1} + A_1r^2 = 0 \quad (13)$$

Oznaczając dla skrócenia zapisu współrzędne przyłożenia siły  $P$  przez:  $\eta_2 \equiv \eta_{2P}$ ,  $\eta_3 \equiv \eta_{3P}$ , otrzymamy następujące równanie izostaby:

$$-\frac{A_3(\eta_{2A} - \eta_2)^2}{\left(\frac{P_2}{P} - 1\right) \cdot \left(\frac{P_\omega}{P} - 1\right)} - \frac{A_2(\eta_{3A} - \eta_3)^2}{\left(\frac{P_3}{P} - 1\right) \cdot \left(\frac{P_\omega}{P} - 1\right)} - \frac{2A_1\beta_2\eta_2}{\frac{P_\omega}{P} - 1} - \frac{2A_1\beta_3\eta_3}{\frac{P_\omega}{P} - 1} + \frac{2A_1\beta_\omega\Omega^*}{\frac{P_\omega}{P} - 1} + A_1r^2 = 0 \quad (14)$$

Jeśli przekrój jest bisymetryczny, to wtedy jest prawdziwe:  $\eta_{2A} = \eta_{3A} = 0$  oraz  $\beta_2 = \beta_3 = \beta_\omega = 0$ . W konsekwencji wzór (14) przyjmuje znacznie krótszą postać:

$$-\frac{A_3(-\eta_2)^2}{\left(\frac{P_2}{P}-1\right)\cdot\left(\frac{P_\omega}{P}-1\right)}-\frac{A_2(-\eta_3)^2}{\left(\frac{P_3}{P}-1\right)\cdot\left(\frac{P_\omega}{P}-1\right)}+A_1r^2=0. \quad (15)$$

Po podzieleniu powyższego równania przez  $A_1r^2$  otrzymamy:

$$\frac{(-\eta_2)^2}{r^2\frac{A_3}{A_1}\left(\frac{P_2}{P}-1\right)\cdot\left(\frac{P_\omega}{P}-1\right)}+\frac{(-\eta_3)^2}{r^2\frac{A_2}{A_1}\left(\frac{P_3}{P}-1\right)\cdot\left(\frac{P_\omega}{P}-1\right)}=1. \quad (16)$$

Tak więc w ogólnym przypadku izostaba dla przekroju bisymetrycznego i konkretnej wartości  $P$  jest elipsą o równaniu:

$$\frac{(-\eta_2)^2}{a^2}+\frac{(-\eta_3)^2}{b^2}=1, \quad (17)$$

której długości półosi zależą od sił krytycznych Eulera i Wagnera oraz od warunków brzegowych przyjętych dla trzech funkcji przemieszczeń [5] i wynoszą:

$$a=r\sqrt{\frac{A_1}{A_3}\left(\frac{P_2}{P}-1\right)\cdot\left(\frac{P_\omega}{P}-1\right)} \quad \text{oraz} \quad b=r\sqrt{\frac{A_1}{A_2}\left(\frac{P_3}{P}-1\right)\cdot\left(\frac{P_\omega}{P}-1\right)}. \quad (18)$$

Jeśli siła  $P$  przyjmuje wartości  $+\infty$  lub  $-\infty$  [30, 4, 5], to równanie (14) sprowadza się do postaci (zniknęło  $P!$ ):

$$-A_3(\eta_{2A}-\eta_2)^2-A_2(\eta_{3A}-\eta_3)^2+2A_1\beta_2\eta_2+2A_1\beta_3\eta_3-2A_1\beta_\omega^*\Omega+A_1r^2=0. \quad (19)$$

Jednocześnie długości półosi elipsy równość (17) zapisujemy bardzo prosto:

$$a=r\sqrt{\frac{A_1}{A_3}} \quad \text{oraz} \quad b=r\sqrt{\frac{A_1}{A_2}}. \quad (20)$$

Tak więc i nawet w tym przypadku izostaba dla przekroju bisymetrycznego jest elipsą. Natomiast dopiero jeśli warunki brzegowe dla trzech funkcji przemieszczeń są identyczne (u nas ograniczone swobodnie) dla dwu ugięć i obrotu osi, a więc gdy  $A_1=A_2=A_3=1$  [5, 11], to dopiero wtedy izostaba staje się kołem o promieniu  $r$  i mamy (patrz tablica 2):

$$(\eta_2)^2+(\eta_3)^2=r^2 \quad \text{oraz} \quad a=b=r. \quad (21)$$

Jest to więc kolejna nieścisłość podana przez Własowa [30].

## 7. IZOSTABY I IZOPOWIERZCHNIE KRYTYCZNE DLA OMAWIANYCH BELEK

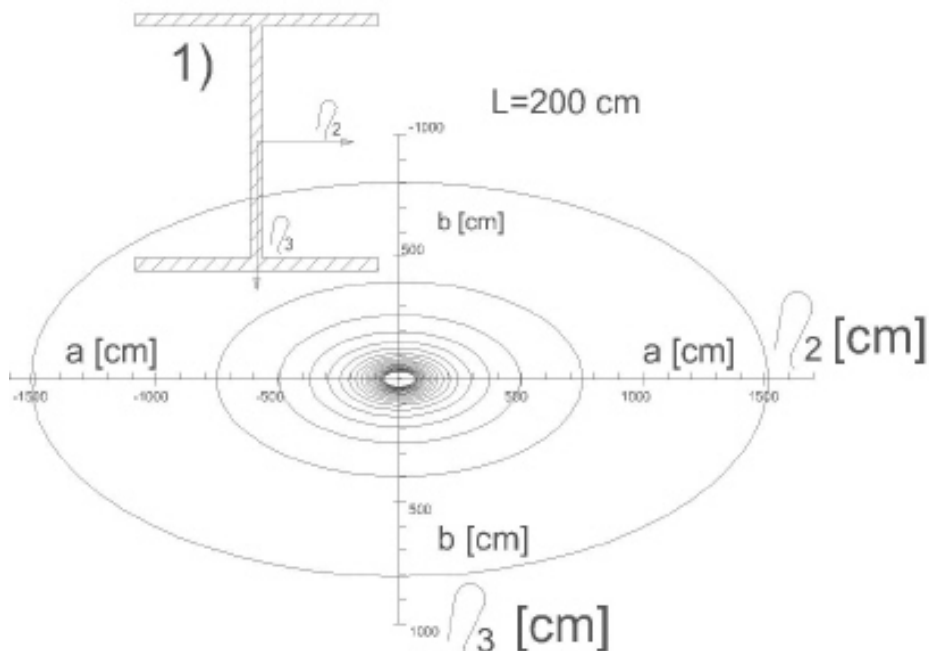
Kolejne izostaby wyznaczano z wyjątkiem przykładu Własowa dla sił  $P$  o wartościach 0,1 kN, 1 kN, 100 kN i dalej co 100 kN. Otrzymane wyniki dla dwóch pierwszych wartości sił przedstawiono w tablicy 2 i dla pozostałych wartości siły  $P$  pokazano je na rysunkach 5-11.



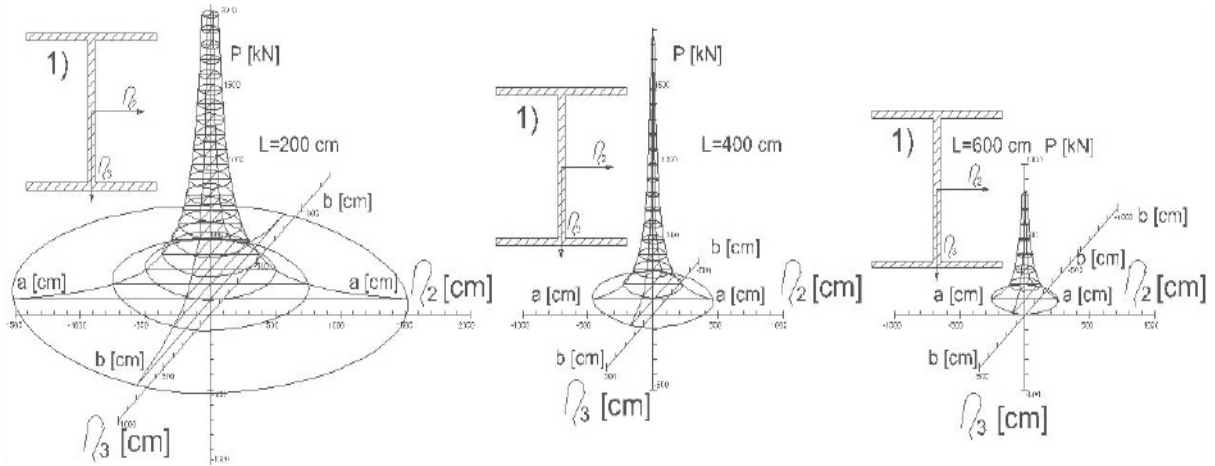
Tablica 2. Półosie elips-izostab dla sił podłużnych o małych wartościach

Lp.	Typ Przekroju	r	L	P = 1 kN			P = 10 kN		
				a	b	M = a/b	a	b	M = a/b
				cm	cm	cm	cm	cm	cm
1	Dwuteownik Charakt. obl. Dokładnie	10,008	200	151365,60	81760,23	1,8513	15126,31	8166,97	1,8521
			400	46841,08	25297,61	1,8516	4674,67	2520,31	1,8547
			600	26157,65	14123,67	1,8520	2606,73	1402,01	1,8592
1a	Dwuteownik Charakt. obl. całkami Mohry	9,999	200	152718,63	81627,56	1,8709	15261,57	8153,71	1,8717
			400	47276,74	25265,59	1,8711	4718,22	2517,12	1,8744
			600	26407,49	14109,26	1,8716	2631,71	1400,57	1,8790
2	Skrzynkowy	8,660	200	186077,21	314560,17	0,5915	18581,28	31439,73	0,5910
			400	92945,12	157169,35	0,5913	9242,41	15685,85	0,5892
			600	61909,33	104740,75	0,5910	6112,70	10427,81	0,5861
3	Trójobwodowy	14,315	200	338352,06	1021746,62	0,3311	33813,73	102161,77	0,3309
			400	168350,70	508467,21	0,3310	16795,47	50830,72	0,3304
			600	112100,01	338669,79	0,3310	11151,45	33845,71	0,3294
4	Prostokąt Własowa (a,b) x 0,1	2,901	200	33522,10	3311,92	10,1216	3348,15	292,68	11,4394
			400	16755,08	1594,43	10,5084	1668,09	37,71	44,2261
			600	11163,42	990,82	11,2667			
5	Prostokąt jednorodny 10 x 12 cm	4,509	200	318508,77	265415,96	1,2000	31830,98	26517,79	1,2003
			400	159218,43	132665,99	1,2001	15882,32	13219,18	1,2014
			600	106108,77	88399,91	1,2003	10551,57	8768,74	1,2033
6	Prostokąt kompozytowy 10 x 12 cm	5,647	200	179302,15	153952,75	1,1646	17910,07	15371,91	1,1651
			400	89616,25	76936,37	1,1648	8921,76	7647,21	1,1666
			600	59707,25	51247,98	1,1650	5910,86	5054,96	1,1693

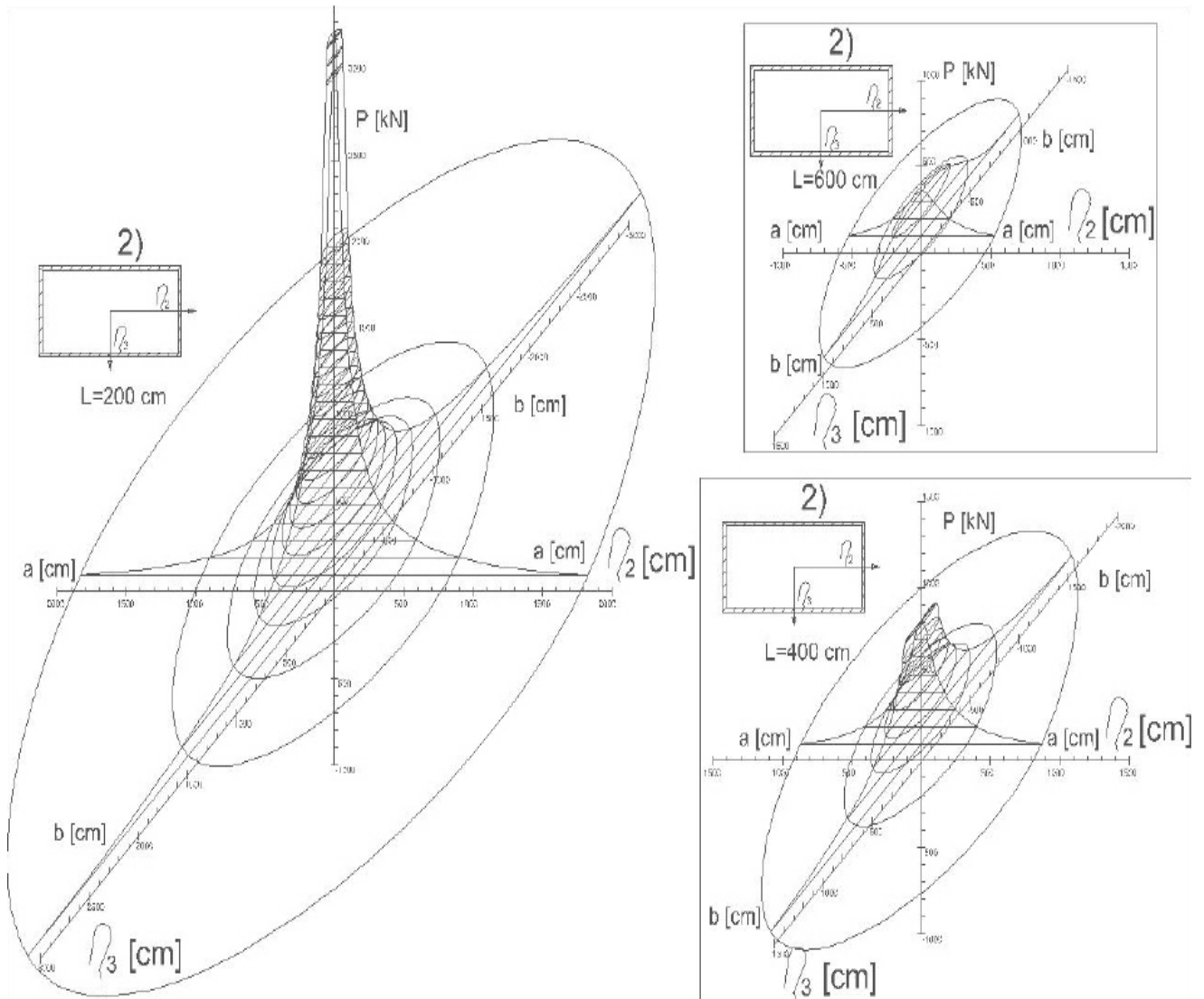
Rysunek 5 podaje obraz izostab dla dwuteownika widzianych w rzucie na płaszczyznę  $0\eta_2\eta_3$  bez wskazania odpowiadających im wartości siły P. Te same izostaby narysowano w pewnej aksonometrii na pierwszym rysunku 6, pokazując jednocześnie skalę działających sił.



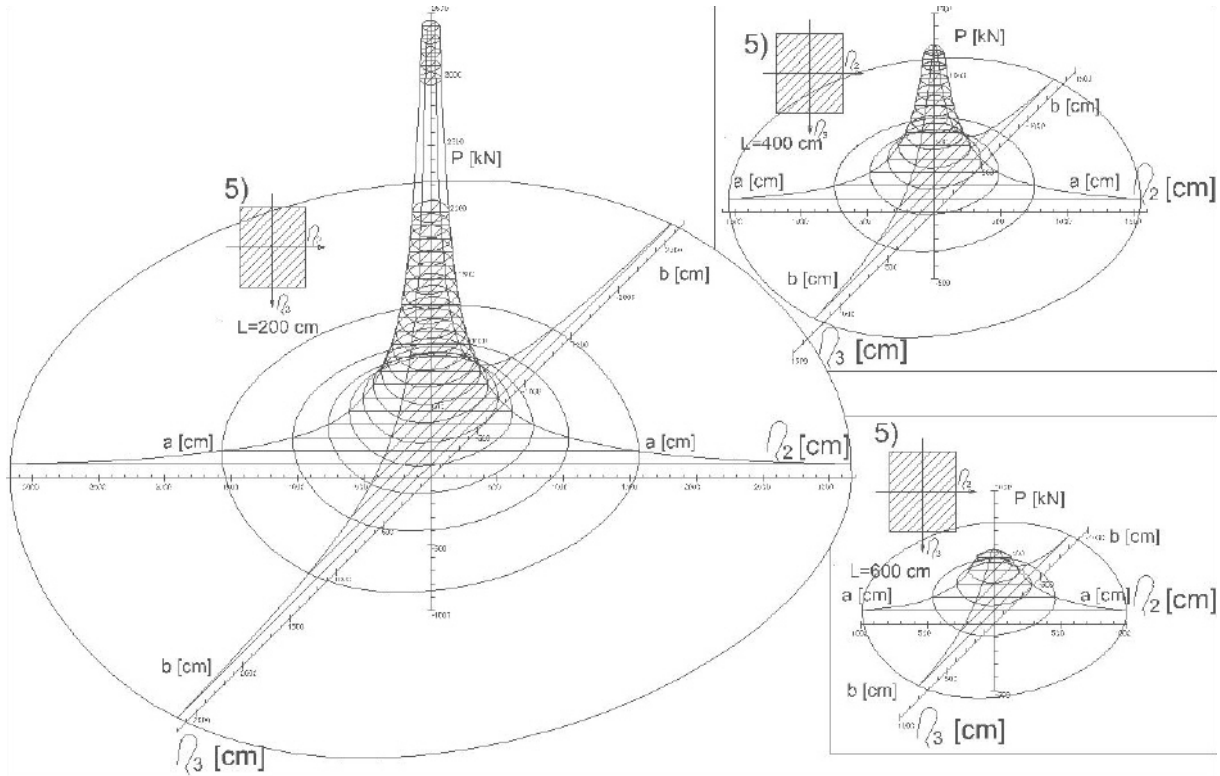
Rys. 5. Zestaw izostab dla różnych wartości mimośrodowej siły podłużnej (porównaj rys. 6) wyznaczone dla dodatnich sił – ściskających



Rys. 6. Izopowierzchnie krytyczne dla trzech długości prętów o przekroju dwuteowym wyznaczone dla dodatnich sił – ściskających

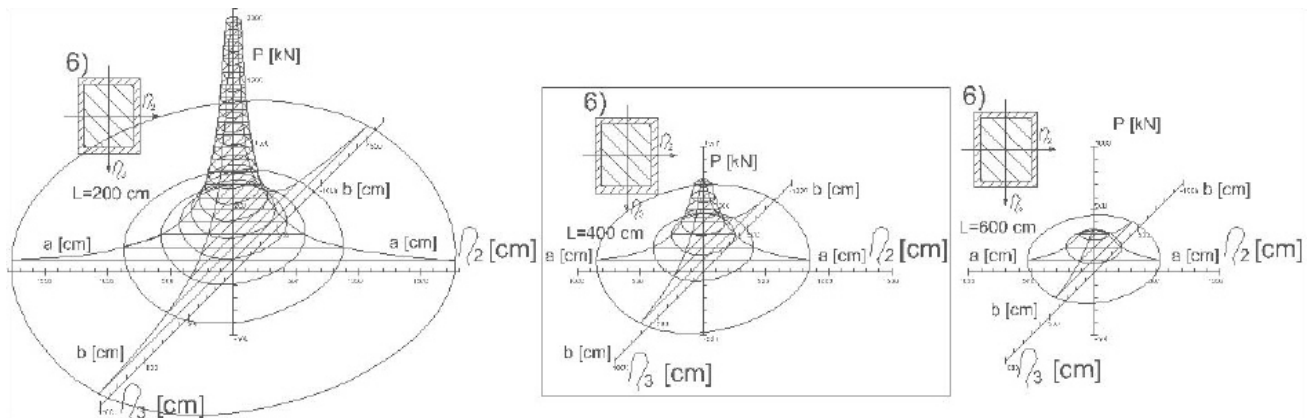


Rys. 7. Izopowierzchnie krytyczne dla trzech długości prętów o przekroju skrzyńkowym wyznaczone dla dodatnich sił – ściskających



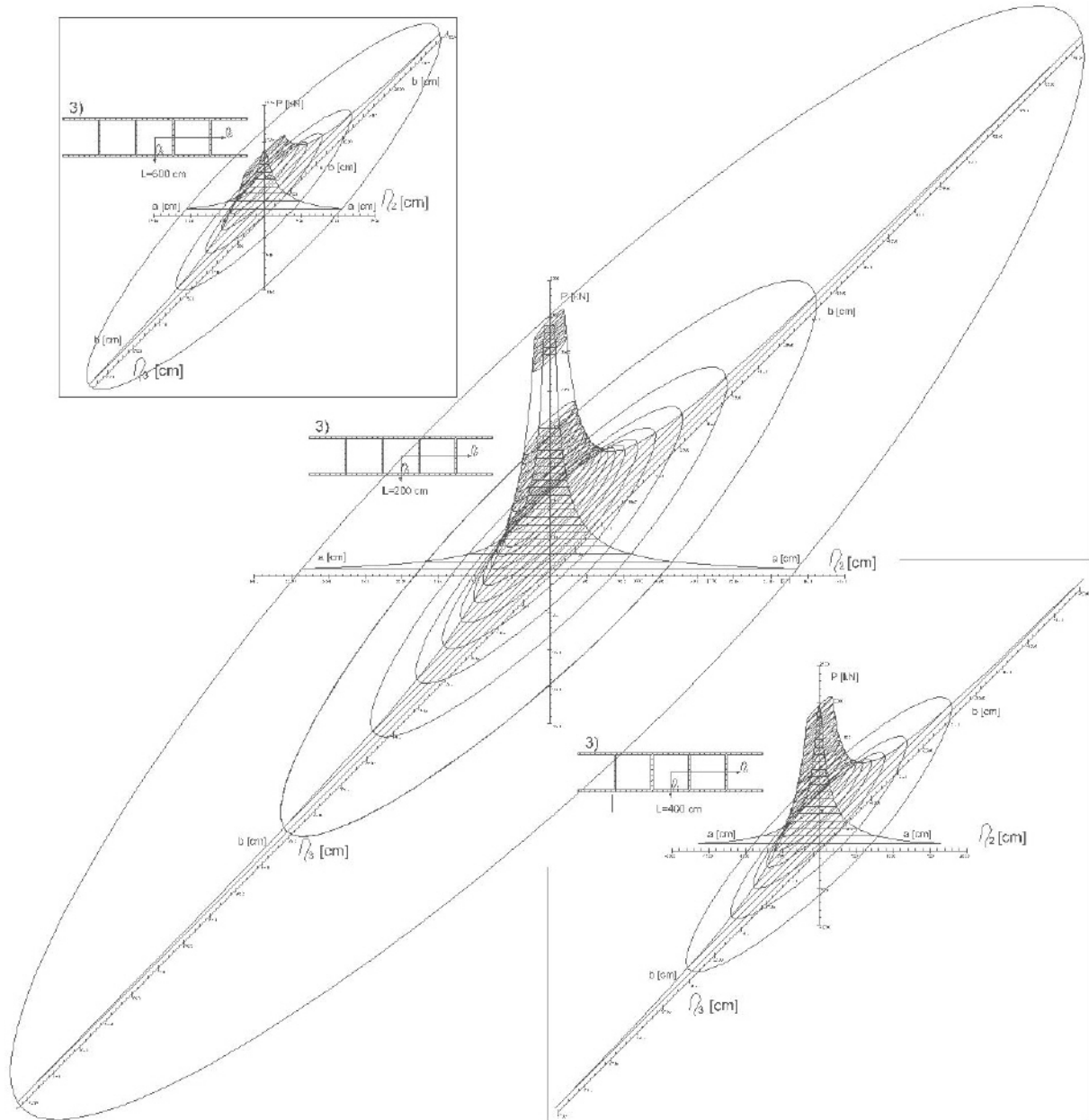
Rys. 8. Izopowierzchnie krytyczne dla trzech długości prętów o przekroju prostokątnym jednorodnym wyznaczone dla dodatnich sił – ściskających

Rysunki 8 i 9 pozwalają porównać możliwość utraty stateczności dwóch prętów o przekrojach 10 x 12 cm: pełnym stalowym (rys. 8) i kompozytowym zawierającym rdzeń drewniany (rys. 9). Pierwszy z nich jest znacznie odporniejszy na wyboczenie. Podobnie jak na poprzednich rysunkach, skłonność do wyboczenia wzrasta wraz z długością pręta, co wiadome jest od dawna.



Rys. 9. Izopowierzchnie krytyczne dla trzech długości prętów o przekroju prostokątnym zbudowanym z dwóch materiałów wyznaczone dla dodatnich sił – ściskających

Na rysunku 11 pokazano fakt, który dotyczy również wszystkich pozostałych rysunków 6 do 10, że *izopowierzchnie krytyczne* mają tu dwie czasy. Dolną (rys. 11 dla pręta o długości 200 cm) o szczycie równym wartości siły krytycznej giętej Eulera przy osiowym jej ustawieniu – dotyczącą faktycznych sił krytycznych, oraz górną zwróconą wierzchołkiem w dół (siła krytyczna Wagnera), a otwartą górną krawędzią zdążającą do cylindra kołowego izostaby Własowa. Na rysunkach 6 do 10 naniesiono tylko dolne czasy *izopowierzchni krytycznych*.



Rys. 10. Izopowierzchnie krytyczne dla trzech długości prętów o przekroju trójobwodowym wyznaczone dla dodatnich sił – ściskających

### 8. MIMOŚRODOWA SIŁA KRYTYCZNA DLA BELEK SYMETRYCZNYCH

Jeśli przekrój jest symetryczny i mimośrodkowa siła podłużna jest ustawiona na osi symetrii  $\eta_3$ , rys. 4b, to wtedy z równania (2) przekształconego do postaci (12) lub (13) można otrzymać warunek utraty stateczności pręta zapisany następująco:

$$C_1 P^2 + C_2 P + C_3 = 0, \tag{22}$$

gdzie:

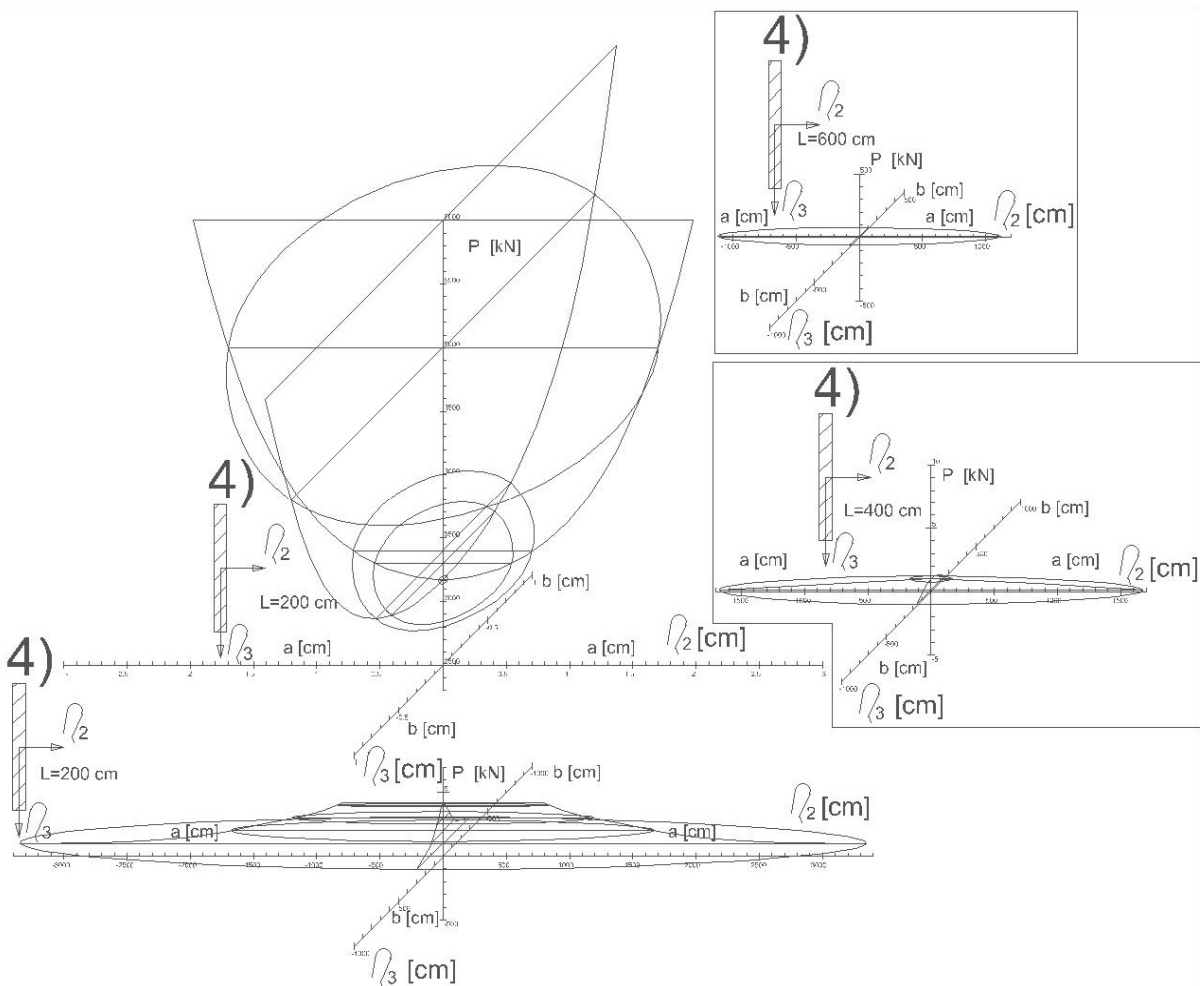
$$C_1 = A_1 \left( r^2 + 2\beta_3 \eta_{3P} - 2\beta_{\dot{\omega}}^* \Omega \right) - A_2 (\eta_{3A} - \eta_{3P})^2, \quad C_3 = A_1 r^2 P_3 P_{\omega}, \tag{23}$$

$$C_2 = -A_1 \left[ r^2 (P_{\omega} + P_3) + 2P_3 \left( \beta_3 \eta_{3P} - \beta_{\dot{\omega}}^* \Omega \right) \right].$$

Z uwagi na bisymetrię rozpatrywanych przekrojów mamy  $\eta_{2A} = \eta_{3A} = 0$  i  $\beta_2 = \beta_3 = \beta_{\dot{\omega}} = 0$ , stąd powyższe wyrażenia upraszczają się wtedy do postaci:

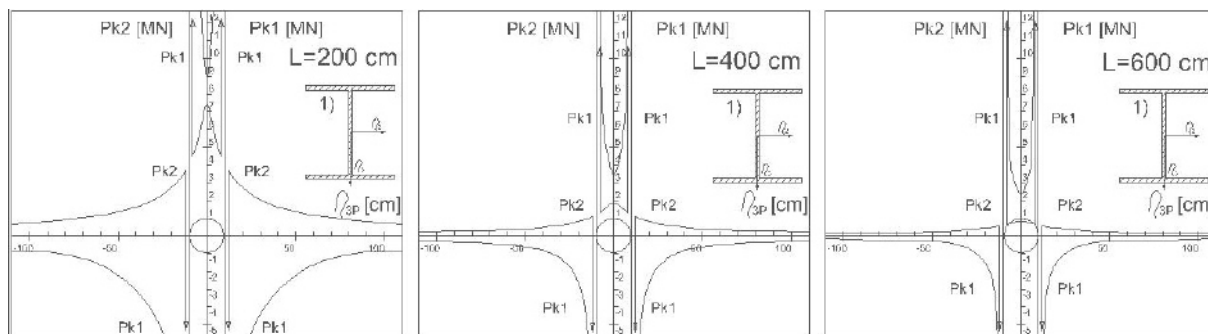
$$C_1 = A_1 r^2 - A_2 (\eta_{3P})^2, \quad C_2 = -A_1 r^2 (P_{\omega} + P_3),$$

$$C_3 = A_1 r^2 P_3 P_{\omega}.$$



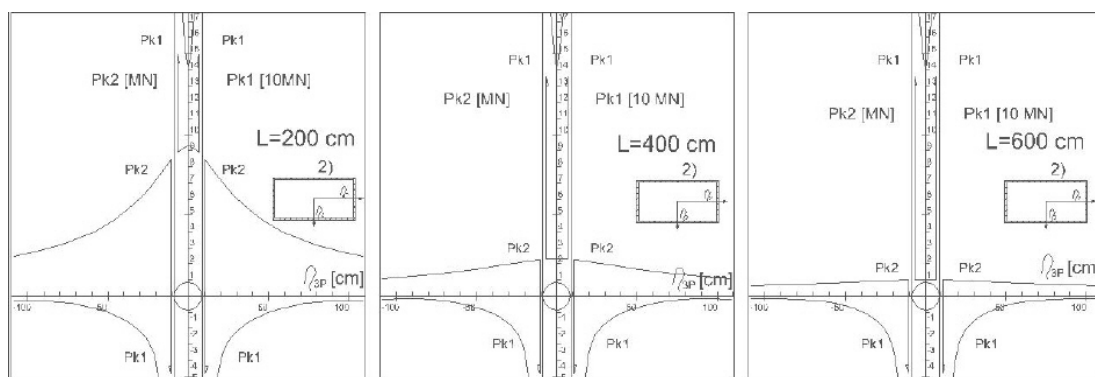
Rys. 11. Izopowierzchnie krytyczne dla trzech długości prętów o przekroju prostokątnym (Własowa) wyznaczone dla dodatnich sił – ściskających

Rozwiązanie równania (12) daje trzy pierwiastki. Pierwszy  $P_{k3} = P_2$  równy jest sile krytycznej Eulera (3)<sub>1</sub>. Natomiast dwa pozostałe  $P_{k1}$  i  $P_{k2}$  wyznaczamy z równania (20). Wykresy tych ostatnich sił pokazano na rysunkach 12 do 17. Najmniejszy z tych pierwiastków jest siłą krytyczną. Na przecięciu się osi układu pokazano koła izostab Własowa dla sił P o nieskończonej wartości.

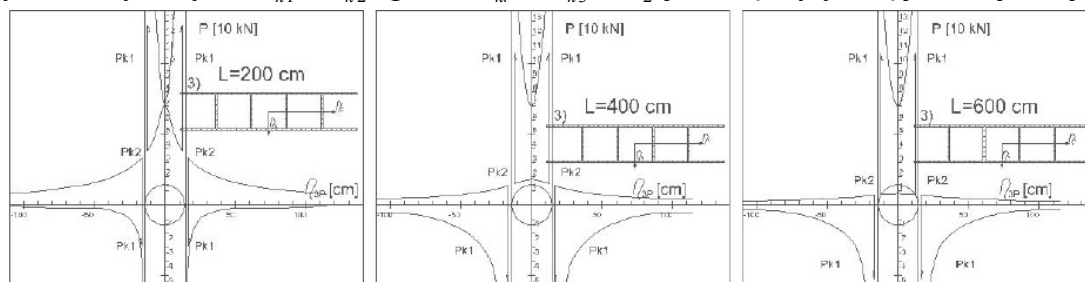


Rys. 12. Wykresy sił  $P_{k1}$  i  $P_{k2}$ , gdzie  $P_{k3} = P_2$  jest znacznie większa od siły krytycznej  $P_{kr} = P_{k2}$

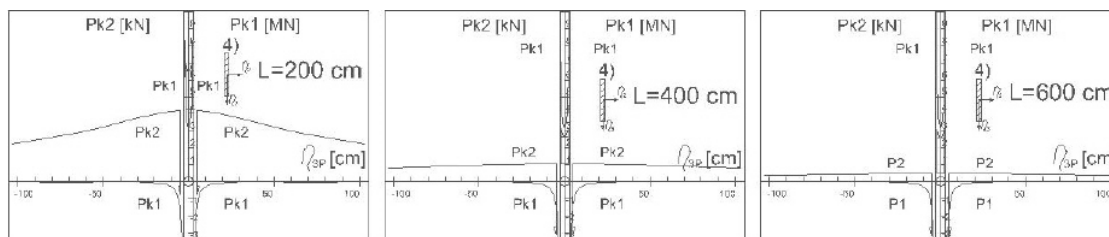
Po obu ich stronach pokazano pionowe asymptoty, do których zbiegają wykresy siły  $P_{k1}$  i  $P_{k2}$ . Czym pręt jest dłuższy, tym siła krytyczna  $P_{k2}$  jest mniejsza. Należy zwrócić uwagę, że na podanych wykresach poszczególne siły  $P_{k1}$  i  $P_{k2}$  mają inne skale jednostek: kN, MN, 10 MN, 100 MN. Rozciągające siły krytyczne są możliwe jedynie na zewnątrz izostab Własowa.



Rys. 13. Wykresy sił  $P_{k1}$  i  $P_{k2}$ , gdzie  $P_{kr} = P_{k3} = P_2$  jest siłą krytyczną jako najmniejsza

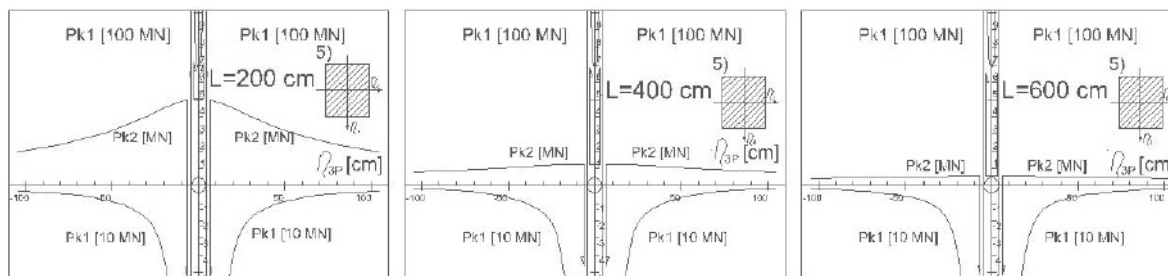


Rys. 14. Wykresy sił  $P_{k1}$  i  $P_{k2}$ , gdzie  $P_{kr} = P_{k3} = P_2$  jest siłą krytyczną jako najmniejsza

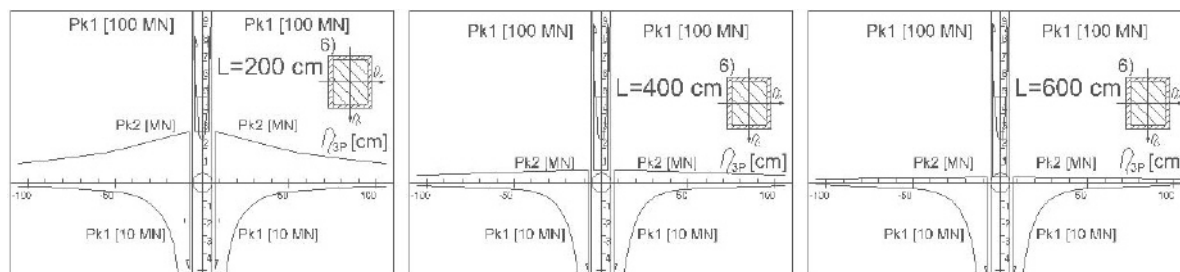


Rys. 15. Wykresy sił  $P_{k1}$  i  $P_{k2}$ , gdzie  $P_{k3} = P_2$  jest znacznie większa od siły krytycznej  $P_{kr} = P_{k2}$

Wszystkie gałęzie wykresów sił  $P_{k1}$  w pobliżu asymptoty wzrastają do nieskończoności. Natomiast  $P_{k2}$  dopiero w odległości  $1.0E-15$  cm od izostaby Własowa wykazują osobliwość, co symbolicznie w skażonej skali pokazano na rysunkach.



Rys. 16. Wykresy sił  $P_{k1}$  i  $P_{k2}$ , gdzie  $P_{k3} = P_2$  jest znacznie większa od siły krytycznej  $P_{kr} = P_{k2}$



Rys. 17. Wykresy sił  $P_{k1}$  i  $P_{k2}$ , gdzie  $P_{k3} = P_2$  jest znacznie większa od siły krytycznej  $P_{kr} = P_{k2}$

Tablica 3. Siły krytyczne  $\bar{P}_{ki}$  (dla siły osiowej) oraz siły Eulera  $P_2$  i  $P_3$  oraz Wagnera  $P_\omega$

Typ przekroju	$l = 200$ cm					$l = 400$ cm					$l = 600$ cm				
	$P_{k1}$	$P_{k2}$	$P_{k3} = P_2$	$P_3$	$P_\omega$	$P_{k1}$	$P_{k2}$	$P_{k3} = P_2$	$P_3$	$P_\omega$	$P_{k1}$	$P_{k2}$	$P_{k3} = P_2$	$P_3$	$P_\omega$
	kN	kN	kN	kN	kN	kN	kN	kN	kN	kN	kN	kN	kN	kN	kN
1)	8992	<b>7411</b>	25939	<b>7411</b>	8992	3448	<b>1852</b>	6484	<b>1852</b>	3448	2421	<b>823</b>	2882	<b>823</b>	2421
1a)	8996	<b>7420</b>	25429	<b>7420</b>	8996	3447	<b>1855</b>	6357	<b>1855</b>	3447	2419	<b>824</b>	2825	<b>824</b>	2419
2)	142428	9264	<b>3242</b>	9264	142428	142273	2316	<b>810,59</b>	2316	142273	142245	1029	<b>360</b>	1029	142245
3)	71852	70904	<b>7880</b>	71851	70904	70241	17962	<b>1970</b>	17962	70241	70118	7983	<b>875</b>	7983	70118
4)	3168	<b>4,21</b>	421	<b>4,21</b>	3168	3168	<b>1,05</b>	105	<b>1,05</b>	3168	3168	<b>0,46</b>	46,83	<b>0,46</b>	3168
5)	685075	<b>5058</b>	7283	<b>5058</b>	685075	685048	<b>1264</b>	1820	<b>1264</b>	685048	685043	<b>562</b>	809	<b>562</b>	685043
6)	247393	<b>3005</b>	4076	<b>3005</b>	247393	247383	<b>751</b>	1019	<b>751</b>	247383	247381	<b>333</b>	452	<b>333</b>	247381

W tablicy 3 zestawiono razem trzy pierwiastki  $\bar{P}_{ki}$  rozwiązania zadania dla siły osiowej, siły Eulera  $P_2$  i  $P_3$  oraz Wagnera  $P_w$ . Siła krytyczna jako najmniejsza z podanych wartości została wyróżniona pogrubionym drukiem. Podobną analizę należy wykonać dla każdego pręta o danej długości, przekroju, ustawieniu siły, warunkach brzegowych itd.

## 9. KOMENTARZ DO SPOSOBU OBLICZEŃ I UZYSKANE REZULTATY

Wyniki obliczeń przeprowadzono z wykorzystaniem programu MS Excel. Są to bardzo proste czynności powielane przy różnych długościach prętów i zmieniających się charakterystykach geometrycznych przekrojów. Znacznie więcej zabiegów wymagało sporządzenie pokazanych wyżej wykresów za pomocą programu AutoCAD Professional 2010 i takie ich dopracowanie, aby dało się je przedstawić na stosunkowo niewielkiej powierzchni. Aby ten cel osiągnąć zrezygnowano z przedstawienia ich np. za pomocą dostępnej w AutoCAD 2010 techniki 3D. Charakterystyki geometryczne podane w tablicy 1 obliczono również z wykorzystaniem własnych programów.

## 10. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Po wykonaniu wielu testów numerycznych, o czym świadczą zacytowane niżej prace (i to nie wszystkie), należy stwierdzić, że zagadnienie utraty stateczności nawet pojedynczego pręta jest nadzwyczaj skomplikowane i zależne od wielu czynników (patrz rozdz. 3 i następne). O tym nie ma mowy przy obecnej praktyce projektowej.

1. Najważniejszym wnioskiem z tej pracy jest fakt, że dokładniejsze obliczanie zespołu obciążeń krytycznych jest możliwe zarówno dla prętów cienkościennych, jak i pełnych, jednorodnych i kompozytowych.
2. Obciążenie krytyczne występuje przy działaniu sił podłużnych ściskających i rozciągających [30, 2-4] oraz przy każdym zestawie zewnętrznych obciążeń złożonych, w tym poprzecznych ciągłych i skupionych.
3. Obecna praca pokazuje pewne nieścisłości w ocenie utraty stateczności pręta podanych przez Własowa. W tamtym okresie obliczenia bez wykorzystania komputera nie pozwalały na wykrycie osobliwości, jakie pokazano w pracy autora [5] i obecnie.

Inne wnioski, jakie przytaczał autor w poprzednich wspomnianych tu pracach pozostają ważne.

## LITERATURA

- [1] Bober W., Tarczewski R.: *Shaping of T-section steel post for acoustic screen*, Proc. Lightweight Struct.in Civil Eng. – Contemp. probl. XVI Int. Semin. of IASS Polish Chapter, Warsaw, Dec. 3, 2010, pp. 111. Ed. by Micro-Publisher J.B.O., Wyd. Nauk., pp. 97-99.
- [2] Dąbrowski R.: *Praktycznie ważne przypadki wyboczenia skrętnego prętów cienkościennych*, AIL, 1956, 1-2, s. 45-108.
- [3] Dąbrowski R.: *Skręcanie mostowych i hydrotechnicznych konstrukcji cienkościennych o przekroju zamkniętym*, Wyd. Politechniki Gdańskiej, 1958.
- [4] Mutermilch J., Kociołek A.: *Wytrzymałość i stateczność prętów cienkościennych o przekroju otwartym*, WPW, Warszawa, 1972.



- [5] Obrębski J.B.: *Cienkościenne sprężyste pręty proste*, skrypt WPW, Warszawa, 1991, stron 452, drugie wydanie, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1999, str. 455.
- [6] Obrębski J.B.: *On the strength of composite bars*, Int. IASS Symp. Spatial Structures: heritage, present and future. Milan, 5-9.06.1995, pp. 517-526.
- [7] Obrębski J.B.: *Stability of composite straight bars*, Międzyn. Seminarium Wydz. IL PW – MISI Moskwa, 09.1995. OWPW Warszawa 1995, pp. 101-110.
- [8] Obrębski J.B.: *Some torsion problems in thin-walled bars mechanics*, Międzyn. Konf. Wydz. IL PW, LSCE'95, 25-29.09.1995. MAGAT, Warszawa, 1995, pp. 395-404.
- [9] Obrębski J.B.: *On the stress analysis for composite straight bars*, Międzyn. Seminarium (Ukrainian-Polish), Wydz. IL PW – Prydneprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture, OWPW, 1996, Warszawa, 21-34.
- [10] Obrębski J.B.: *Uniform criterion for geometrical unchangeability and for instability of structures*, Proc. of the Intern. Conf. on Stability of Struct., Zakopane, Poland, 1997.
- [11] Obrębski J.B.: *Wytrzymałość materiałów*, skrypt PW, Micro-Publisher J.B. Obrębski Wydawnictwo Naukowe, Printed by AGAT, Warszawa 1997, stron 238.
- [12] Obrębski J.B.: *Mechanics and strength of composite space bar structures* (General lecture 30 min) Intern. IASS Congress on Spatial Structures in New Renovation Projects of Buildings and Constructions, Moscow, Russia, 22-26 June 1998.
- [13] Obrębski J.B.: *Some rules and observations on the composite bar structures mechanical analysis*, Int. IASS 40th Anniversary Congress, Madrid, 20-24 September, 1999.
- [14] Obrębski J.B.: *Mechanical point of view on modeling of space structures made of composite bars*, Int. IASS Symp. Istanbul, 29.05-2.06.2000, pp. 491-500.
- [15] Obrębski J.B.: *Nonlinear character of the computations of composite bar structures*. (Keynote lecture) Proc. of Fourth Int. Colloq. on Computation of Shell & Spatial Struct., June 4-7, 2000, Chania-Crete, Greece, CD-ROM 20 pages & abstracts vol. pp. 558-559.
- [16] Obrębski J.B.: *Designing of composite bar structures taking into consideration instability effects*, 9th Symposium on Stability of Structures, Zakopane, 25-29.09.2000, pp. 227-234.
- [17] Obrębski J.B.: *On the mechanics and strength analysis of composite structures* (Invited paper 30min.) Struct. Engineering, Mechanics and Computat., Cape Town, 2-4.04.2001, Ed. by A. Zingoni, Elsevier Sc. Ltd, Amsterdam-London-New York-Oxford-Paris-Shannon-Tokyo, pp. 161-172.
- [18] Obrębski J.B.: *New mechanical problems in analysis of composite bars space structures*. Int. Conf. on Lightweight Struct. in Civil Eng. 24-28.06.2002, Warsaw, Poland, pp. 926-935.
- [19] Obrębski J.B.: *Applications of uniform criterion for geometrical unchangeability, stability and dynamic stability of struct.* (Inv.lecture). Int. Conf. ICSSD, Singapore, 2002, pp. 70-79.
- [20] Obrębski J.B. and Tolksdorf J.: *Advanced examples of strength analysis for composite straight bars*, Międzyn. Seminarium (Ukrainian-Polish), Wydz. IL PW – Prydneprovsk State Academy of Civil Engin. and Archit., Warsaw, 26-30.06.2006, OWPW, pp. 265-282.
- [21] Obrębski J.B.: *Uniform criterion of structures instability in static and dynamical tasks*. XI Sympozjum Stateczności Konstrukcji, Zakopane, 11-15.09.2006, pp. 299-306.

- [22] Obrębski J.B., Tolksdorf J.: *Comparative examples of instability analyses for straight bars in the light of theory and standards*, Proc. Lightweight Struct. in Civil Engineering – Contemporary problems. XII Intern. Colloquium of IASS Polish Chapter, Warsaw, Dec.1, 2006, pp.188. Edited by Micro-Publisher Jan B.Obrębski, Wydawn. Naukowe, pp. 95-112.
- [23] Obrębski J.B.: *Theory for thin-walled bars – performed investigations and tests*. LSCE 2009. XV LSCE – Lightweight Structures in Civil Engineering – Contemporary Problems, International Seminar of IASS Polish Chapter, Warsaw, 4-5 Dec., 2009, pp. 124-143.
- [24] Obrębski J.B.: *Stability of steel pillar supporting acoustic screen*, Proc. Lightweight Struct. in Civil Engin. – Contemporary probl. XVI Intern. Semin.of IASS Polish Chapter, Warsaw, Dec.3, 2010, pp.111. Ed. by Micro-Publisher Jan B. Obrębski, Wydawn. Nauk., pp. 70-75.
- [25] Obrębski J.B.: *Przykłady obliczania naprężeń w prętach kompozytowych przy wytrzymałości złożonej*, WAT 2012, XVI Międzynarodowa Szkoła Komputerowego Wspomagania Projektowania, Wytwarzania i Eksploatacji, Jurata, 14-18 maja, 2012, str. 61-74, „Mechanik”, 7, 2012 +CD.
- [26] Obrębski J.B.: *Some observations on mechanical behavior of bars with composite cross-sections*. XVIII LSCE – Lightweight Structures in Civil Engineering – Contemporary Problems, Local Seminar of IASS Polish Chapter, Warsaw, 7 Dec. 2012, pp. 110-121.
- [27] Obrębski J.B.: *Wpływ skręcania na naprężenia obliczone dla serii belek kompozytowych*, WAT 2013, XVII Międzynarodowa Szkoła Komputerowego Wspomagania Projektowania, Wytwarzania i Eksploatacji, Jurata, 14-18 maja, 2012, s. 61-74, „Mechanik”, 7, 2012 + CD.
- [28] Obrębski J.B.: *Comparison of some critical loadings for simingly similar bars with composite cross-sections*. XIX LSCE – Lightweight Struct. in Civil Engin. – Contemporary Problems, Local Sem. of IASS Polish Chapter, Warsaw, 6 Dec. 2013, pp.110-121.
- [29] Obrębski J.B.: *Przykłady wieloparametrowej utraty stateczności prętów prostych*, WAT 2014. XVIII Międzynarodowa Szkoła Komputerowego Wspomagania Projektowania, Wytwarzania i Eksploatacji, Jurata, 12-16 maja, 2014, t. 2, s. 125-142, „Mechanik”, 7, 2012 + CD.
- [30] Własow W.Z.: *Tonkostiennyje uprugije stierzni*, Moskwa, Gosstrojizd. 1940 i wyd. drugie Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit., 1959.