

Mgr inż. Krzysztof RESZUTA

DOI: 10.17814/mechanik.2015.7.289

Dr hab. inż. Józef DREWNIAK, prof. ATH

Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej

KOMPUTEROWO WSPOMAGANE MODELOWANIE DYNAMIKI PRZEKŁADNI DWUDROŻNYCH

Streszczenie: W artykule zaprezentowano schemat obliczeń dynamiki przekładni dwudrożnych z użyciem programów. Zamodelowano w programie Autodesk Inventor model kół zębatach o zębach prostych służący do wyznaczenia sztywności zazębienia metodą elementów skończonych. Zagadnienie wyznaczenia sztywności zazębienia rozwiązano w programie ANSYS stosując do tego celu analizę nieliniową z uwzględnieniem tarcia międzyzębnego. Do rozwiązania układu równań różniczkowych obrazujących dynamikę badanej przekładni zastosowano procedurę Rungego–Kutty IV w programie MATLAB. Zaprezentowano przebieg drgań skrętnych oraz współczynnika dynamicznego K_v .

COMPUTER-AIDED MODELING OF DYNAMICS OF SPLIT-PATH GEARBOXES

Abstract: A calculation scheme for dynamic of split-path gearbox was presented in this paper. A spur gears were modelled in Autodesk Inventor which were used to obtain stiffness of the gear tooth. The meshing stiffness was obtained using nonlinear solution with friction in ANSYS software. To solve the system of differential equations showing the dynamics of studied split-path gearbox Runge–Kutta IV procedure was used in MATLAB software. In this article torsional vibrations and dynamic factor K_v was presented.

Słowa kluczowe: dynamika przekładni, przekładnie dwudrożne, MATLAB, ANSYS

Keywords: gearbox dynamics, split-path gearboxes, MATLAB, ANSYS

1. WPROWADZENIE

Przekładnie zębate są powszechnie stosowane zarówno w przemyśle jak i w transporcie. Szczególne znaczenie mają przekładnie występujące w transporcie lotniczym. Zniszczenie lub zużycie elementów takiej przekładni może spowodować wypadek lotniczy. Dlatego muszą one spełniać szczególnie wysokie wymagania dotyczące ich wytrzymałości, niezawodności oraz trwałości. Przekładnie wielodrogowe służące głównie do przenoszenia znacznego obciążenia są szczególnie narażone na działanie dużych sił dynamicznych. Wpływ na dynamikę mają źródła zewnętrzne oraz wewnętrzne przekładni. Głównym parametrem wewnętrznym mającym znaczny wpływ na przebieg procesów dynamicznych w przekładniach zębatach jest okresowo zmienna sztywność zazębienia. Badanie wpływu sztywności zazębienia na przebieg procesów dynamicznych zachodzących w przekładni walcowej może być przeprowadzone na drodze badań obiektów rzeczywistych lub przy pomocy modeli matematycznych. Sztywność zazębienia związana jest z aktualnie

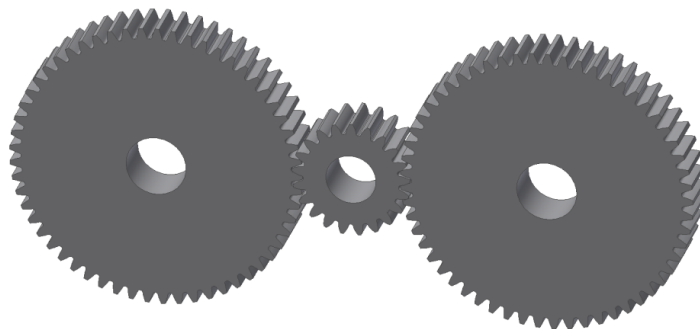
występującą liczbą zębów w zazębieniu. W okresie gdy pracuje tylko jedna para zębów (zazębienie jednoparowe), ulegają one największemu ugięciu, co powoduje, że koło napędzane jest opóźnione w stosunku do koła napędzającego o wielkość odcinka ugięcia mierzonego wzdłuż odcinka przyporu. W chwili gdy następną parę zębów wchodzi w zazębienie, obciążenie uprzednio skupione w jednej parze zębów rozkłada się teraz na dwie pary zębów. Ugięcie mierzone wzdłuż odcinka przyporu jest mniejsze o około 50% w stosunku do ugięcia występującego w zazębieniu jednoparowym. Następnie po wyjściu jednej pary z zazębienia ugięcie pozostałej pary zwiększa się prawie dwukrotnie. W taki sposób na ruch obrotowy kół nakłada się ruch drgający, który przyspiesza lub opóźnia ruch koła napędzanego. Dlatego też ważnym zagadnieniem w projektowaniu przekładni wielodrogowych jest przeprowadzenie analizy dynamicznej uwzględniającej zmienną sztywność zazębienia oraz inne parametry mające wpływ na siły dynamiczne. Metoda symulacji modeli dynamicznych w przekładniach zębatych jest szczególnie użyteczna, ponieważ pozwala w szybki sposób, bez wykonywania skomplikowanych testów laboratoryjnych badać wpływ parametrów konstrukcyjnych i technologicznych na przebieg zjawisk dynamicznych w przekładniach zębatych. Metoda ta w znacznym stopniu ułatwia, a niekiedy jest jedyną metodą, która umożliwia ocenę wpływów jakościowych i ilościowych generowanych przez źródła zewnętrzne i wewnętrzne drgań elementów przekładni na jej stan dynamiczny.

2. WYZNACZANIE SZTYWNOŚCI ZAZĘBIENIA PRZEKŁADNI DWUDROŻNEJ

Problem wyznaczania sztywności zazębienia metodą elementów skończonych można podzielić na kilka etapów. Pierwszy etap polega na utworzeniu modelu geometrycznego w programie do projektowania 3D (np. Autodesk Inventor, SolidWorks). W następnym kroku uprzednio przygotowany model należy podzielić na elementy skończone. Można to zrobić zarówno w programie służącym do obliczeń metodą elementów skończonych (np. ANSYS, FEMAP), jak również w oddzielnym programie służącym do generowania siatki elementów skończonych, np. HyperMesh, a następnie przenieść siatkę do programu, w którym będziemy przeprowadzać obliczenia. W następnym etapie należy odpowiednio zastosować warunki brzegowe, takie jak: obciążenia, podparcia, miejsce kontaktu, tak aby model miał odpowiednio odebraną liczbę stopni swobody oraz właściwie zamodelowane obciążenie i zdefiniowane kontakty. Ostatnim krokiem jest analiza wyników otrzymanych z obliczeń.

2.1. Przygotowanie geometrii kół przekładni dwudrożnej

Na podstawie danych zawartych w tabeli 1 w programie Autodesk Inventor został przygotowany model geometryczny kół zębatych przekładni dwudrogowej (rys. 1).



Rys. 1. Model bryłowy kół przekładni dwudrogowej

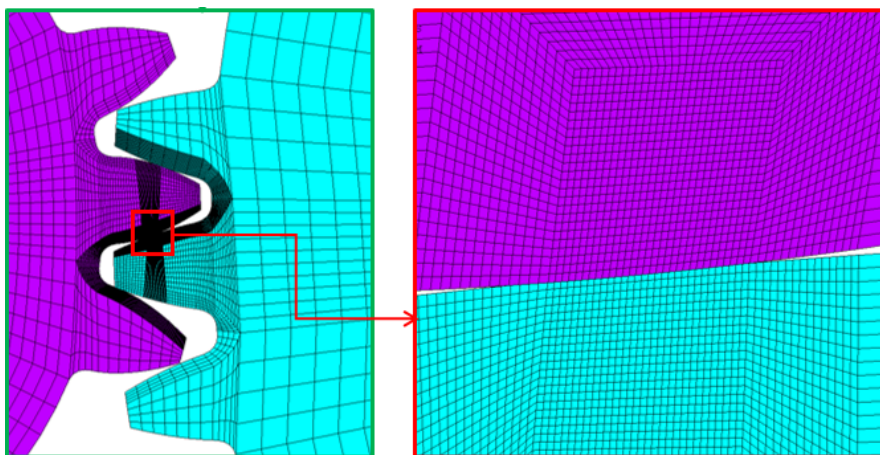
Tabela 1. Parametry badanej przekładni zębatej

Dwudrogowa przekładnia walcowa o zębach prostych			
Symbol	Nazwa	Wartość	Jednostka
z_1	Liczba zębów zębnika	21	–
z_2, z_3	Liczba zębów kół 2 i 3	57	–
m_n	Moduł normalny	2,5	mm
β	Kąt pochylenia linii zęba	0	°
r_{b1}	Promień zasadniczy zębnika	24,667	mm
b_1	Szerokość wieńca zębatego zębnika	26	mm
b_2, b_3	Szerokość wieńca zębatego kół 2 i 3	24	mm
x_1	Współczynnik przesunięcia zarysu zębnika	0,29	–
x_2, x_3	Współczynnik przesunięcia zarysu kół 2 i 3	-0,29	–
p_{et}	Podziałka przyporu czołowa	7,380	mm
ε_α	Czołowy wskaźnik zazębienia	1,500	–
g_α	Długość odcinka przyporu	11,068	mm
P_N	Moc silnika napędowego	7,5	kW
n_1	Prędkość obrotowa na wejściu przekładni	1450	obr/min

Do analizy metodą elementów skończonych powyższy model został odpowiednio zmodyfikowany, a mianowicie usunięto zęby, które nie wpływają na wartość sztywności zazębienia. W modelu tym zamodelowano zazębienie jednoparowe oraz dwuparowe.

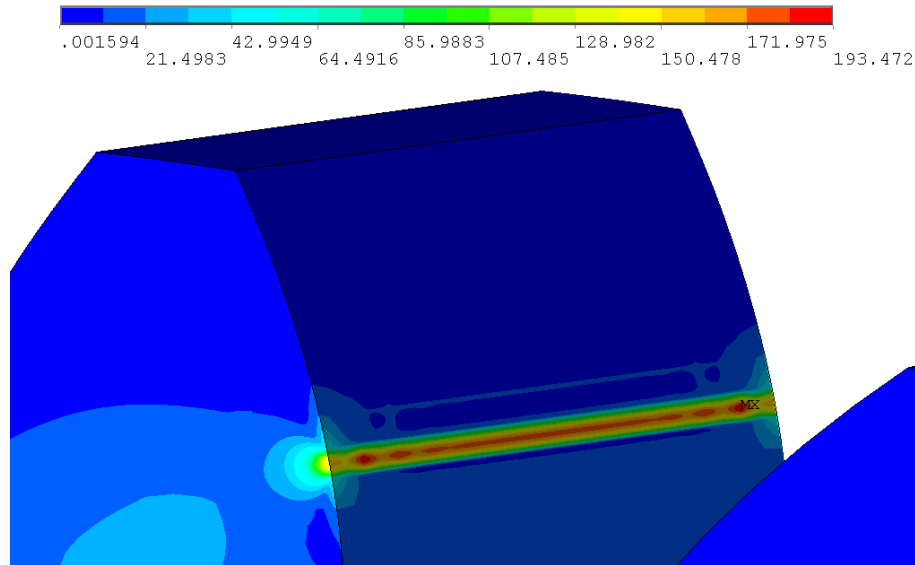
2.2. Wyznaczanie sztywności zazębienia w programie ANSYS

Tak przygotowany model wczytano do programu ANSYS, gdzie zbudowano siatkę elementów skończonych. Gotową siatkę elementów skończonych wraz z lokalnym zagęszczeniem elementów przedstawiono na rysunku 2. Zgodnie z przyjętymi założeniami zębnik ma możliwość obrotu wokół własnej osi, natomiast koło jest nieruchome. Założenia te zamodelowano za pomocą odpowiednich warunków brzegowych. Węzłem leżącym na wewnętrznej powierzchni walcowej piasty zębnika odebrano dwa stopnie swobody (w cylindrycznym układzie współrzędnych), tj. w kierunku osiowym oraz promieniowym. Pozostawiono natomiast możliwość ruchu w kierunku stycznym do osi obrotu zębnika. W analizie zostało uwzględnione tarcie międzyzębne $\mu_1 = 0,01$.



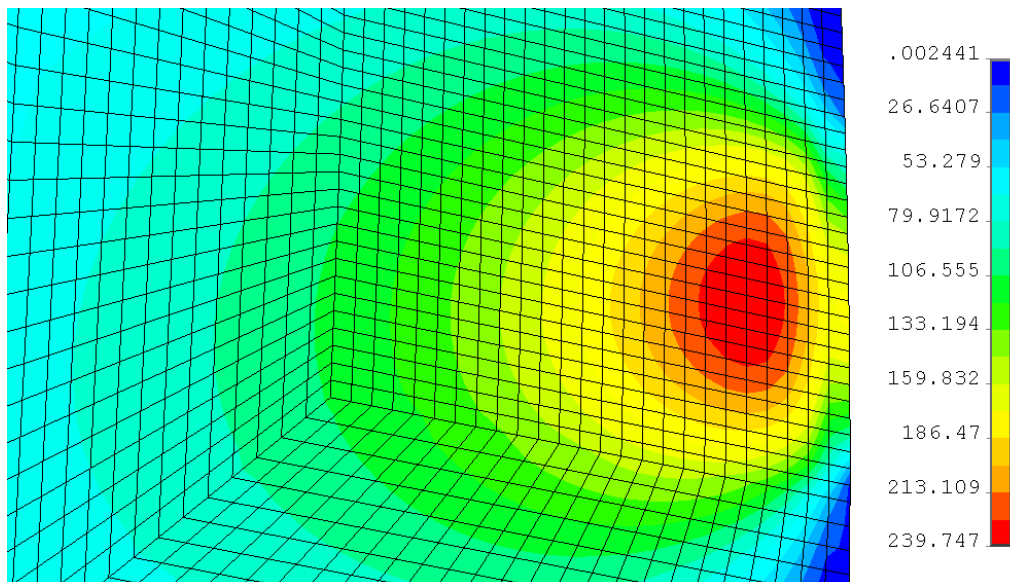
Rys. 2. Siatka elementów skończonych wraz z lokalnym zagęszczeniem elementów

Na podstawie przeprowadzonej analizy ząbienia jednoparowego i dwuparowego uzyskano wyniki w postaci naprężeń zredukowanych von Misesa oraz przemieszczeń w kierunku stycznym do osi obrotu. Poniżej przedstawiono rozkład naprężeń zredukowanych w styku ząbienia jednoparowego.



Rys. 3. Naprężenia zredukowane von Misesa zębika

Na poniższym rysunku, dzięki zastosowaniu lokalnie gęstej siatki, można zaobserwować potwierdzenie zasady Hertza mówiącej, że największe naprężenia kontaktowe występują pod powierzchnią stykających się ciał.



Rys. 4. Naprężenia zredukowane von Mises w miejscu styku zębów, w połowie szerokości wieńca zębika

2.3. Wyznaczanie przebiegu sztywności zazębienia

Na podstawie otrzymanych wyników z obliczeń metodą elementów skończonych wyznaczono maksymalną sztywność pojedynczej pary zębów:

- dla zazębienia jednoparowego maksymalna sztywność zazębienia k'_j wynosi:

$$k'_j = \frac{T_1}{r_b^2 \cdot \Delta\varphi'} = \frac{49,4 \cdot 10^3}{24,667^2 \cdot 2,481 \cdot 10^{-4}} = 327222 \frac{\text{N}}{\text{mm}} = 327,2 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (1)$$

- dla zazębienia dwuparowego k'_d wynosi:

$$k'_d = \frac{T_1}{r_b^2 \cdot \Delta\varphi'} = \frac{49,4 \cdot 10^3}{24,667^2 \cdot 1,632 \cdot 10^{-4}} = 497521 \frac{\text{N}}{\text{mm}} = 497,5 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (2)$$

Teoretyczną maksymalną sztywność zazębienia k'_{th} można obliczyć odpowiednio ze wzoru:

$$k'_{th} = \frac{k'}{C_M \cdot C_R \cdot C_B \cdot \cos \beta} \quad (3)$$

gdzie: C_M – współczynnik korekcyjny ($C_M = 1$), C_R – współczynnik korpusu koła ($C_R = 1$), C_B – współczynnik zarysu odniesienia ($C_B = 1$),

- dla zazębienia jednoparowego k'_{thj} wynosi:

$$k'_{thj} = \frac{327222}{0,8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 409028 \frac{\text{N}}{\text{mm}} = 409 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}; \quad (4)$$

- dla zazębienia dwuparowego k'_{thd} wynosi:

$$k'_{thd} = \frac{497521}{0,8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 621901 \frac{\text{N}}{\text{mm}} = 621,9 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (5)$$

Średnią sztywność zazębienia $k'_{\gamma-A}$ można obliczyć na podstawie wzoru:

$$k_{\gamma-A} = k'_j \cdot (0,75 \cdot \varepsilon_\alpha + 0,25) = 327,222 \cdot (0,75 \cdot 1,5 + 0,25) = 449,9 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (6)$$

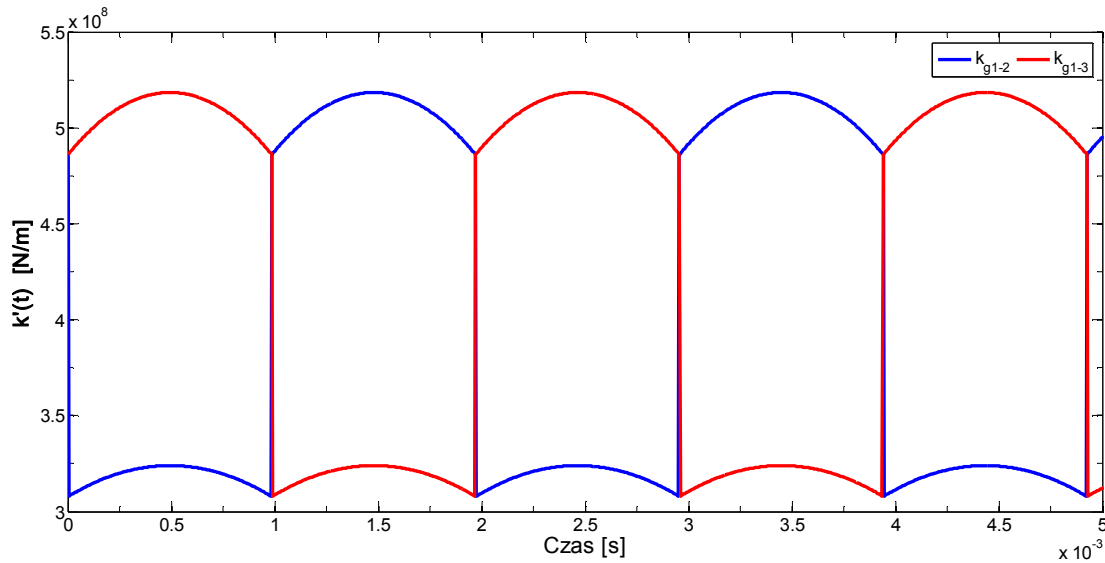
Na podstawie powyższych danych oraz wzoru Caia [1, 2] wykreślono przebieg sztywności zazębienia w funkcji czasu (rys. 10):

$$K(t) = \frac{1}{0,85 \cdot \varepsilon_\alpha} \cdot \left(\frac{-1,8}{(t_z \cdot \varepsilon_\alpha)^2} \cdot t^2 + \frac{1,8}{t_z \cdot \varepsilon_\alpha} \cdot t + 0,55 \right), \quad (7)$$

gdzie czas t_z odpowiadający przebiegowi sztywności na czołowej podziałce przyporu wynosi:

$$t_z = \frac{30 \cdot p_{et}}{\pi \cdot n_1 \cdot r_b} = \frac{30 \cdot 7,380}{\pi \cdot 1450 \cdot 24,667} = 1,970 \cdot 10^{-3} \text{ s} \quad (8)$$

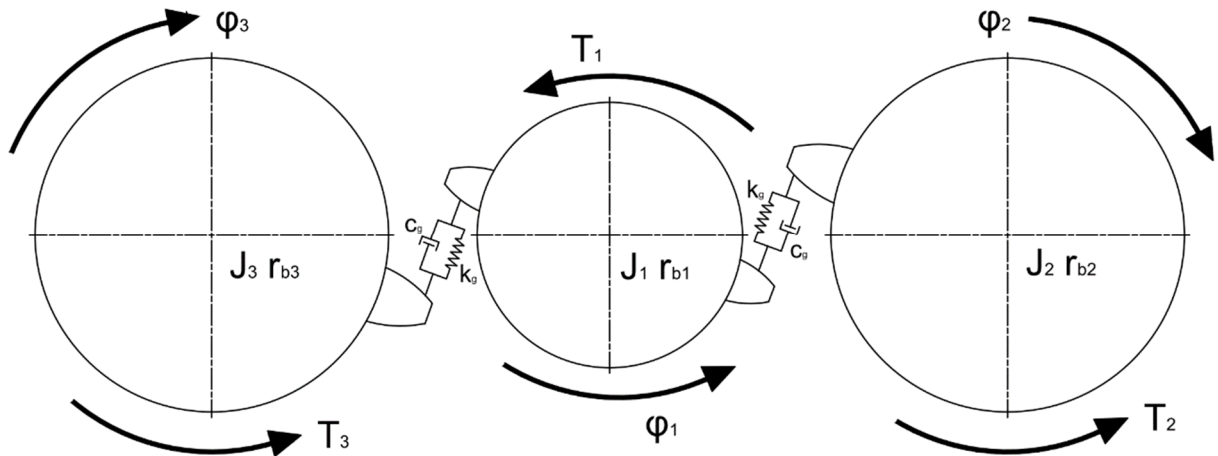
Na podstawie powyższych danych wygenerowano w programie MATLAB przebieg sztywności zazębienia, uwzględniając przesunięcie fazowe pomiędzy poszczególnymi kołami. Wykres sztywności zaprezentowano na rysunku 5.



Rys. 5. Przebieg sztywności zazębienia w funkcji czasu

3. OBLICZANIE DYNAMIKI PRZEKŁADNI DWUDROŻNEJ

Na poniższym rysunku przedstawiono model dynamiczny badanej przekładni. Model ten posiada trzy stopnie swobody, które są związane z ruchem drgającym kół zębatach.



Rys. 6. Przebieg sztywności zazębienia w funkcji czasu

W tabeli 2 przedstawiono parametry kół wykorzystane do obliczeń dynamicznych.

Tabela 2. Parametry dynamiczne analizowanej przekładni zębatej

Symbol	Nazwa	Wartość	Jednostka
J_1	Masowy moment bezwładności zębnika 1	$1,47 \cdot 10^{-4}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
J_2, J_3	Masowy moment bezwładności koła 2 i 3	$7,81 \cdot 10^{-3}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
c_g	Tłumienie w zazębieniu	100	(N·s)/m
r_{b1}	Promień zasadniczy zębnika 1	$2,47 \cdot 10^{-2}$	m
r_{b2}, r_{b3}	Promień zasadniczy koła 2 i 3	$6,70 \cdot 10^{-2}$	m
r_{f1}	Ramię momentu tarcia na zębniku 1	$7,47 \cdot 10^{-3}$	m
r_{f2}, r_{f3}	Ramię momentu tarcia na kole 2 i 3	$20,27 \cdot 10^{-3}$	m
μ	Współczynnik tarcia między współpracującymi zębami	0,01	–

Model dynamiczny drgań skrętnych przekładni dwudrogowej przedstawiony powyżej zawiera koła zębate o masowych momentach bezwładności J_i i promieniach zasadniczych r_{bi} . Zazębienia współpracujących kół przedstawiono w postaci elementów odzwierciedlających zmienną sztywność zazębienia $k_g(t)$ oraz stałe tłumienie c_g . W zazębieniu uwzględniono siły tarcia F_{fi} , które generują momenty tarcia T_{fi} . Koło czynne 1 jest obciążone momentem wejściowym T_1 , a koła bierne 2 i 3 momentami obciążającymi T_2 i T_3 .

3.1. Równania ruchu dynamiki przekładni dwudrogowej

Poniżej przedstawiono równania ruchu dla modelu przekładni dwudrogowej. Równania ruchu wyprowadzono przy wykorzystaniu równań Lagrange'a II rodzaju:

$$\begin{aligned}
 & J_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + k_g(t) \cdot (r_{b1} \cdot \varphi_1 - r_{b2} \cdot \varphi_2) \cdot r_{b1} + k_g(t) \cdot (r_{b1} \cdot \varphi_1 - r_{b3} \cdot \varphi_3) \cdot r_{b1} + \\
 & + c_g \cdot (r_{b1} \cdot \dot{\varphi}_1 - r_{b2} \cdot \dot{\varphi}_2) \cdot r_{b1} + c_g \cdot (r_{b1} \cdot \dot{\varphi}_1 - r_{b3} \cdot \dot{\varphi}_3) \cdot r_{b1} = \\
 & = T_1 \pm r_{f1} \cdot \left[k_g(t) \cdot (r_{b1} \cdot \varphi_1 - r_{b2} \cdot \varphi_2) + c_g \cdot (r_{b1} \cdot \dot{\varphi}_1 - r_{b2} \cdot \dot{\varphi}_2) \right] \cdot \mu + \\
 & \pm r_{f1} \cdot \left[k_g(t) \cdot (r_{b1} \cdot \varphi_1 - r_{b3} \cdot \varphi_3) + c_g \cdot (r_{b1} \cdot \dot{\varphi}_1 - r_{b3} \cdot \dot{\varphi}_3) \right] \cdot \mu
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 & J_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - k_g(t) \cdot (r_{b1} \cdot \varphi_1 - r_{b2} \cdot \varphi_2) \cdot r_{b2} - c_g \cdot (r_{b1} \cdot \dot{\varphi}_1 - r_{b2} \cdot \dot{\varphi}_2) \cdot r_{b2} = \\
 & = -T_2 \mp r_{f2} \cdot \left[k_g(t) \cdot (r_{b1} \cdot \varphi_1 - r_{b2} \cdot \varphi_2) + c_g \cdot (r_{b1} \cdot \dot{\varphi}_1 - r_{b2} \cdot \dot{\varphi}_2) \right] \cdot \mu
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 & J_3 \cdot \ddot{\varphi}_3 - k_g(t) \cdot (r_{b1} \cdot \varphi_1 - r_{b3} \cdot \varphi_3) \cdot r_{b3} - c_g \cdot (r_{b1} \cdot \dot{\varphi}_1 - r_{b3} \cdot \dot{\varphi}_3) \cdot r_{b3} = \\
 & = -T_3 \mp r_{f3} \cdot \left[k_g(t) \cdot (r_{b1} \cdot \varphi_1 - r_{b3} \cdot \varphi_3) + c_g \cdot (r_{b1} \cdot \dot{\varphi}_1 - r_{b3} \cdot \dot{\varphi}_3) \right] \cdot \mu
 \end{aligned} \tag{11}$$

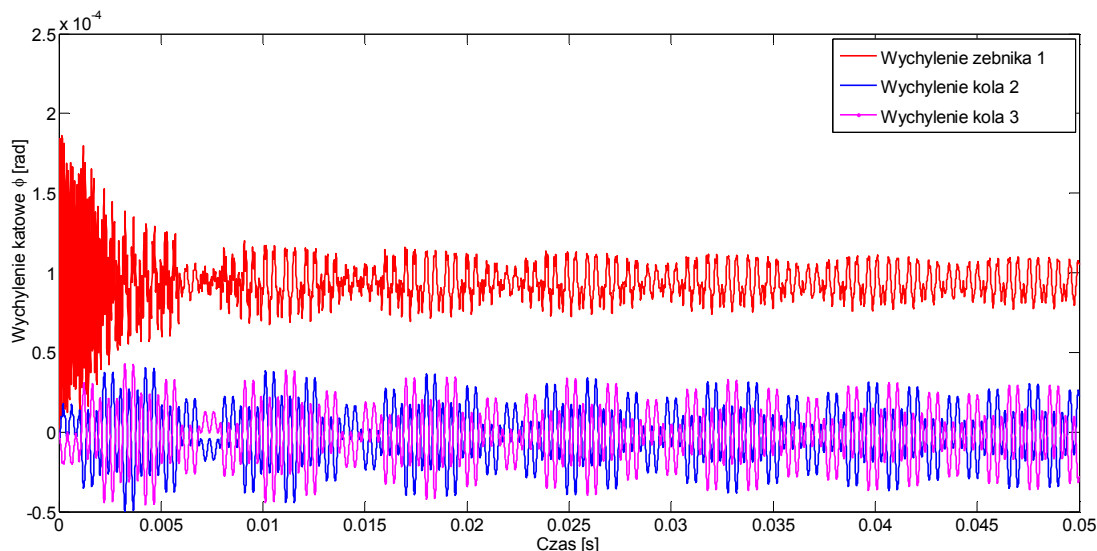
Ostatecznie po przekształceniach uzyskano następujący układ równań różniczkowych pierwszego stopnia:

$$\begin{aligned}
v_2 &= \dot{v}_1 \\
\dot{v}_2 &= \frac{1}{J_1} \cdot \left\{ T_1 - r_{f_1} \cdot \left[k_{g_{1-2}}(t) \cdot (r_{b_1} \cdot v_1 - r_{b_2} \cdot v_3) + c_{g_{1-2}} \cdot (r_{b_1} \cdot v_2 - r_{b_2} \cdot v_4) \right] \cdot \mu_{1-2} + \right. \\
&\quad - r_{f_1} \cdot \left[k_{g_{1-3}}(t) \cdot (r_{b_1} \cdot v_1 - r_{b_3} \cdot v_5) + c_{g_{1-3}} \cdot (r_{b_1} \cdot v_2 - r_{b_3} \cdot v_6) \right] \cdot \mu_{1-3} + \\
&\quad - k_{g_{1-2}}(t) \cdot (r_{b_1} \cdot v_1 - r_{b_2} \cdot v_3) \cdot r_{b_1} - k_{g_{1-3}}(t) \cdot (r_{b_1} \cdot v_1 - r_{b_3} \cdot v_5) \cdot r_{b_1} + \\
&\quad \left. - c_{g_{1-2}} \cdot (r_{b_1} \cdot v_2 - r_{b_2} \cdot v_4) \cdot r_{b_1} - c_{g_{1-3}} \cdot (r_{b_1} \cdot v_2 - r_{b_3} \cdot v_6) \cdot r_{b_1} \right\}
\end{aligned} \quad (12)$$

Układ równań (12) rozwiązano w programie MATLAB stosując procedurę numerycznego różniczkowania Rungego–Kutty IV rzędu z krokiem czasowym $5 \cdot 10^{-6}$.

3.2. Wyniki analizy dynamicznej

Na podstawie uzyskanych wyników otrzymano przebiegi drgań skrętnych (rys. 7) oraz przebiegi współczynnika dynamicznego K_v (rys. 8).



Rys. 7. Przebiegi drgań skrętnych

Nominalna siła międzyzębna dla przekładni dwudrogowej wyraża się następującym wzorem:

$$F_{c_{n1-2}} = F_{c_{n1-3}} = 0,5 \cdot \frac{T_1}{r_1 \cdot \cos \alpha_t} = 0,5 \cdot \frac{49,397 \cdot 10^3}{26,25 \cdot \cos 20^\circ} = 1001,27 \text{ N} \quad (13)$$

Na podstawie wykresu przedstawionego na powyższym rysunku oraz znajomości przebiegów sztywności zazębienia $k_g(t)$ (rys. 6) wyznaczono wartości siły międzyzębnej F_c :

$$\begin{aligned}
F_{c_{1-2}} &= k_g(t) \cdot (r_{b_1} \cdot \varphi_1 - r_{b_2} \cdot \varphi_2) + c_g \cdot (r_{b_1} \cdot \dot{\varphi}_1 - r_{b_2} \cdot \dot{\varphi}_2) = \\
&= 520582166 \cdot \left[2,47 \cdot 10^{-2} \cdot 78,40 \cdot 10^{-6} - 6,70 \cdot 10^{-2} \cdot (-18,03 \cdot 10^{-6}) \right] + \\
&\quad + 100 \cdot \left[2,47 \cdot 10^{-2} \cdot 0,197 - 6,70 \cdot 10^{-2} \cdot 0,080 \right] = 1628,40 \text{ N}
\end{aligned} \quad (14)$$

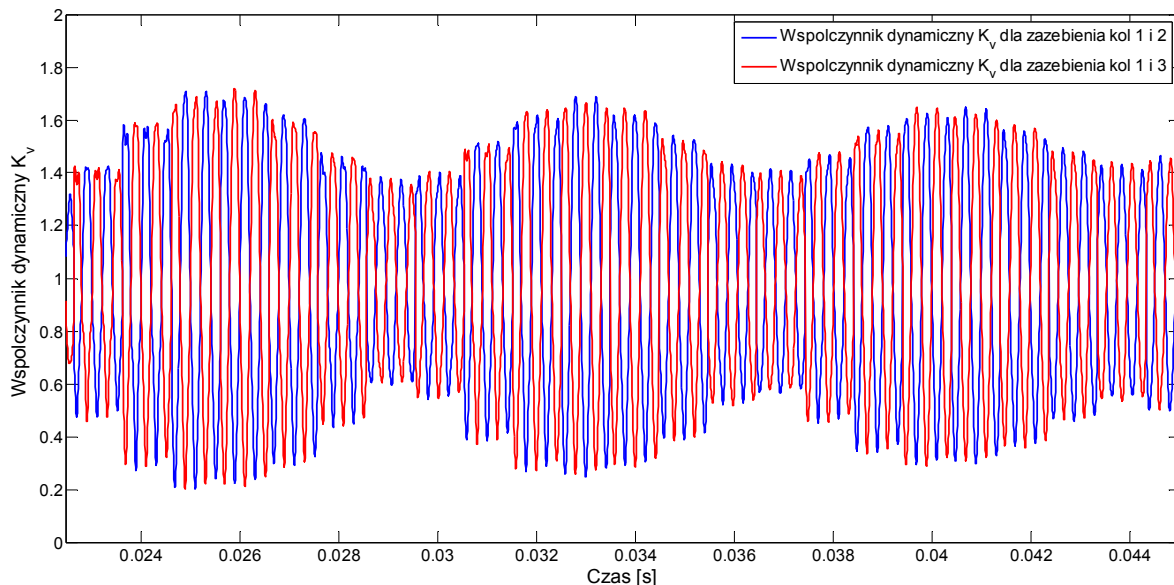
$$\begin{aligned}
 F_{c_{1-2}} &= k_g(t) \cdot (r_{b_1} \cdot \varphi_1 - r_{b_2} \cdot \varphi_2) + c_g \cdot (r_{b_1} \cdot \dot{\varphi}_1 - r_{b_2} \cdot \dot{\varphi}_2) = \\
 &= 321098882 \cdot [2,47 \cdot 10^{-2} \cdot 108,78 \cdot 10^{-6} - 6,70 \cdot 10^{-2} \cdot (-36,635 \cdot 10^{-6})] + \\
 &+ 100 \cdot [2,47 \cdot 10^{-2} \cdot 0,092 - 6,70 \cdot 10^{-2} \cdot (-0,043)] = 1649,12 \text{ N}
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Znając wartości siły międzyzębnej F_c oraz nominalnej siły międzyzębnej F_{cn} , wyznaczono współczynnik dynamiczny K_v .

$$K_{v_{1-2}} = \frac{F_{c_{1-2}}}{F_{c_{n1-2}}} = \frac{1628,40}{1001,27} = 1,626
 \tag{16}$$

$$K_{v_{1-3}} = \frac{F_{c_{1-3}}}{F_{c_{n1-3}}} = \frac{1649,12}{1001,27} = 1,647
 \tag{17}$$

Poniżej zaprezentowano przebieg współczynnika dynamicznego K_v dla przekładni dwudrożnej.



Rys. 8. Przebieg współczynnika dynamicznego K_v

4. WNIOSKI

W artykule przedstawiono schemat komputerowo wspomaganego obliczenia dynamiki przekładni dwudrożnych. Szczególną uwagę zwrócono na wyznaczanie sztywności ząbkowania metodą elementów skończonych w programie ANSYS, gdzie zastosowano analizę nieliniową z uwzględnieniem tarcia międzyzębnego. Do rozwiązania układu równań różniczkowych zastosowano procedurę Rungego–Kutty IV w programie MATLAB. Otrzymane przebiegi drgań skrętnych kół czynnego i biernego zostały wykorzystane do wyznaczenia dynamicznych sił międzyzębnych oraz współczynnika dynamicznego ząbkowania. Jest to jeden z podstawowych współczynników wpływu decydujących o trwałości i wytrzymałości przekładni zębatej. Tak dokładny sposób wyznaczania tego współczynnika z wykorzystaniem modelu dynamicznego przekładni wymagany jest w przypadku obliczania sprawdzającego wytrzymałości przekładni zgodnie z metodą A zawartą w normie ISO 6336.

LITERATURA

- [1] Cai Y.: *Simulation on the Rotational Vibration of Helical Gears in Consideration of the Tooth Separation Phenomenon (A New Stiffness Function of Helical Involute Tooth Pair)*, "Journal of Mechanical Design", Transactions of the ASME 117 (1995), 460-469.
- [2] Cai Y., Hayashi T.: *The Linear Approximated Equation of Vibration of a Pair of Spur Gears (Theory and Experiment)*, "Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME" 116 (1994), 558-564.
- [3] Drewniak J., Reszuta K., *Analiza wpływu wielodrogowości na dynamikę przekładni zębatej*, „Logistyka”, 4/2014, 222-229.
- [4] Drewniak J., *Projektowanie kół zębatych walcowych, stożkowych i ślimakowych wg norm ISO*, Wydawnictwo Akademii Techniczno-Humanistycznej, Bielsko-Biała, 2009.
- [5] Fernandez del Rincon A., Viadero F., Iglesias. M., García P., de-Juan A., Sancibrian R.: *A Model For the Study of Meshing Stiffness in Spur Gear Transmissions*, "Mechanism and Machine Theory" 61 (2013), 30-58.
- [6] Grzesica P.: *Wpływ obciążenia zewnętrznego na siły międzyzębne w przekładniach zębatych maszyn górniczych*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2011.
- [7] Howard I., Jia S., Wang J.: *The Dynamic Modelling of a Spur Gear in Mesh Including Friction and a Crack*, "Mechanical Systems and Signal Processing" 15(5) (2001), 831-853.
- [8] Jaśkiewicz Z., Wąsiewski A., *Przekładnie walcowe. Geometria, wytrzymałość, dokładność wykonania*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 1992.
- [9] Kiekbusch T., Howard I., *A Common Formula for the Combined Torsional Mesh Stiffness of Spur Gears*, 5th Australasian Congress on Applied Mechanics, Brisbane (Australia), 2007.
- [10] Kiekbusch T., Sappok D., Sauer B., Howard I., *Calculation of the Combined Torsional Mesh Stiffness of Spur Gears with Two- and Three-Dimensional Parametrical FE Models*, "Strojnicki vestnik – Journal of Mechanical Engineering" 57(2011)11, 810-818.
- [11] Müller L., *Przekładnie zębate. Dynamika*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1986.
- [12] Osiński J., Kamiński E., *Drgania parametryczne modelu jednostopniowej przekładni zębatej uwzględniającej tłumienie i stałe obciążenie*, Archiwum Budowy Maszyn, tom XXVIII, zeszyt 1, Warszawa, 1981.
- [13] Yu H., Eberhard P., Zhao Y., Wang H., *Sharing Behavior of Load Transmission on Gear Pair Systems Actuated By Parallel Arrangements of Multiple Pinions*, "Mechanism and Machine Theory" 65 (2013), 58-70.
- [14] Reszuta K., *Analiza dynamiki przekładni zębatych dwudrogowych*, praca dyplomowa magisterska, Akademia Techniczno-Humanistyczna, Bielsko-Biała, 2014.