

Mgr inż. Magdalena ZIELIŃSKA

DOI: 10.17814/mechanik.2015.7.320

Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie, Wydział Nauk Technicznych

Dr hab. inż. Grzegorz ZBOIŃSKI

Instytut Maszyn Przepływowych PAN w Gdańsku

ADAPTACYJNA ANALIZA POWŁOK ZDOMINOWANYCH GIĘTNIE O ZŁOŻONYM OPISIE MECHANICZNYM

Streszczenie: Prezentowane badania dotyczą adaptacyjnej analizy struktur o złożonym opisie mechanicznym z zastosowaniem adaptacyjnych elementów przejściowych. W niniejszej pracy porównano wyniki uzyskane z wykorzystaniem różnych wariantów modelu przejściowego: klasycznego modelu przejściowego oraz modelu udoskonalonego. Wariant udoskonalony gwarantuje ciągłą zmianę naprężeń i odkształceń. W obu przypadkach zestawiono obrazy naprężeń oraz rozkład błędów aproksymacji przed adaptacją typu hp sieci początkowej i po niej.

ADAPTIVE ANALYSIS OF BENDING-DOMINATED SHELLS OF COMPLEX MECHANICAL DESCRIPTIONS

Abstract: Presented research concerns an adaptive analysis of structures of complex mechanical description with application of adaptive transition elements. The present work focuses on comparison of the results obtained with use of two different variants of the transition elements: the classical transition model and the enhanced model. The enhanced elements guarantee the continuous change of stresses and strains. In both cases the stress patterns and approximation error distributions before and after the hp-adaptation of the initial mesh are compared.

Słowa kluczowe: mechanika ciała stałego, struktury złożone, modele przejściowe, adaptacyjna metoda elementów skończonych

Keywords: solid mechanics, complex structures, transition models, adaptive finite element method

1. WPROWADZENIE

W niniejszym artykule rozważono adaptacyjną metodę elementów skończonych typu *hp* w odniesieniu do cienkościennych struktur złożonych z wykorzystaniem adaptacyjnych elementów przejściowych. Struktury złożone rozumiane są tu jako struktury, w których występuje więcej niż jeden model mechaniczny. Ze względu na złożony opis mechaniczny uwzględniający występowanie elementów powłokowych pierwszego rzędu i elementów odpowiadających trójwymiarowej teorii sprężystości (hierarchiczne elementy powłokowe wyższego rzędu), prawidłowe zamodelowanie takich struktur wymaga wprowadzenia elementów przejściowych.

W niniejszej pracy skupiono się na problematyce analizy powłok zdominowanych giętnie z zastosowaniem wspomnianych modeli przejściowych. Ograniczono się tu do dwóch wariantów modeli przejściowych. Pierwszym wariantem modelu przejściowego jest tak zwany model klasyczny, gwarantujący ciągłość naprężeń i odkształceń na granicy pomiędzy modelami, jednak ze skokiem wartości w polu naprężeń oraz dużymi gradientami w polu odkształceń na tej granicy. Drugi rozpatrywany wariant modelu przejściowego to tzw. model udoskonalony, który zapewnia ciągłą zmianę naprężeń i odkształceń w strefie przejściowej między modelami (z wyeliminowaniem skoków naprężeń i gradientów odkształceń na granicy modeli). Wariant ten zapewnia ciągłą zmianę kinematycznych założeń teorii Reissnera–Mindlina. Chodzi tutaj o przejście od warunku braku wydłużenia prostych normalnych do powierzchni środkowej na proste, w strefie powłokowej, do braku tego warunku w strefie trójwymiarowej.

Nasze badania nakierowane są na stworzenie modelu przejściowego o cechach numerycznych (zbieżność rozwiązania, poziom błędu) nie gorszych niż w przypadku modeli podstawowych (hierarchiczne modele powłokowe i model powłokowy pierwszego rzędu). W celu oceny efektywności udoskonalonych elementów przejściowych porównano siatki przed adaptacją metodą elementów skończonych typu hp z siatkami uzyskanymi po adaptacji. Porównano wyniki uzyskane dla struktur przy zastosowaniu klasycznego oraz udoskonalonego elementu przejściowego. Porównania dokonano pod kątem rozkładów naprężeń, w tym w szczególności zdolności do usuwania wewnętrznej warstwy brzegowej, oraz poprawy zbieżności rozwiązania w przypadku zastosowania modelu udoskonalonego w modelach dyskretnych powłok zdominowanych giętnie.

Wspomniane zjawisko wewnętrznej warstwy brzegowej występuje na granicy modelu powłokowego pierwszego rzędu i modelu przejściowego. Występowanie tego zjawiska spowodowane jest skokiem wartości w polu naprężeń oraz dużych gradientów w polu odkształceń. Skok wartości jest wynikiem obowiązywania płaskiego stanu naprężeń w modelu powłokowym pierwszego rzędu i braku takiego stanu w części hierarchicznej modelu przejściowego (tak jak w hierarchicznym modelu powłokowym wyższego rzędu lub trójwymiarowym). Natomiast duże gradienty odkształceń wynikają z braku wydłużeń prostych normalnych do powierzchni środkowej w strefie powłokowej pierwszego rzędu. Warunek taki nie obowiązuje natomiast w części hierarchicznej modelu przejściowego.

Klasyczne modele i elementy przejściowe zostały opisane w pracach [1, 4]. Z kolei wariant udoskonalony przedstawiono w [9, 10]. Wariant pośredni (pomiędzy klasycznym a udoskonalonym), gwarantujący jedynie ciągłą zmianę naprężeń w strefie przejściowej, opisano w [2, 3, 8].

2. ADAPTACYJNA METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Zastosowanie metody elementów skończonych do klasycznej teorii sprężystości wymaga dokonania podziału obszaru trójwymiarowego ciała sprężystego V na E elementów skończonych, zgodnie z zależnością:

$$\bar{V} = \sum_{e=1}^E \bar{V}_e, \quad (1)$$

gdzie:

e – kolejny numer elementu,

$\bar{V} = V + \partial V$ – domknięcie obszaru otwartego V ,

$\partial V \equiv S$ – powierzchnia boczna ciała.

Podział ten dla dowolnych dwóch elementów e i f charakteryzują następujące właściwości:

$$\forall e \neq f \quad (V_e \cap V_f = \emptyset) \quad (2)$$

$$\forall e \neq f \quad (\bar{V}_e \cap \bar{V}_f = \partial V_e \cap \partial V_f \equiv \bar{S}_e \cap \bar{S}_f = \bar{S}_{ef})$$

W powyższych zależnościach obowiązuje:

$$\bar{V}_e = V_e + \partial V_e \equiv V_e + \bar{S}_e \quad (3)$$

Aproksymacja elementami skończonymi polega na wprowadzeniu funkcji kształtu N_{ib}^e opisujących stan wewnątrz elementu (przemieszczenia w trzech kierunkach u_i , $i = 1, 2, 3$) w oparciu o skończoną liczbę niewiadomych (stopni swobody) q_b^e , gdzie indeks $b \in \overset{e}{A}$, $\overset{e}{A} = \{1, 2, \dots, n_{dof}\}$ oznacza stopień swobody, a n_{dof} to liczba wszystkich stopni swobody.

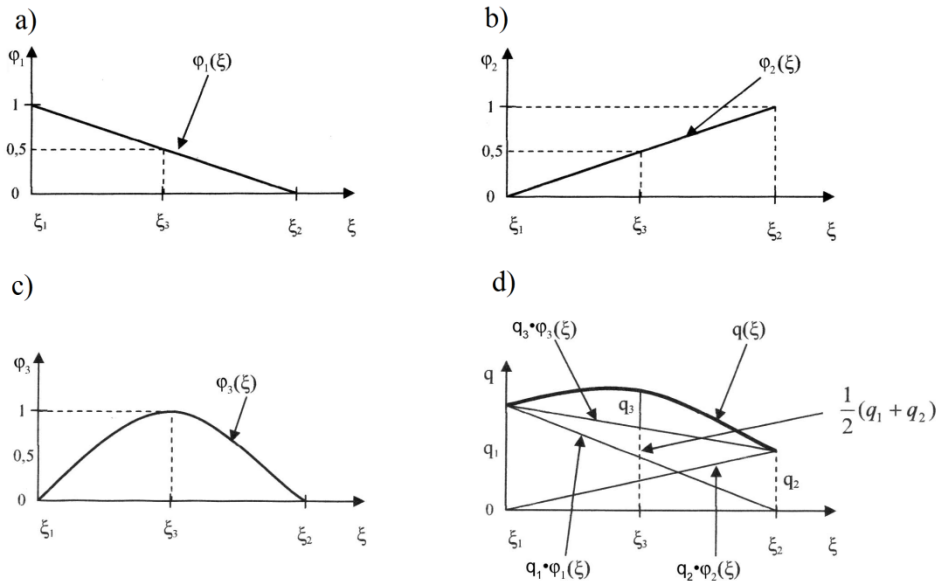
W tym przypadku niewiadome u_i aproksymuje się sumą iloczynów funkcji kształtu i odpowiadających im stopni swobody: $\overset{e}{N} \overset{e}{q}$.

W przypadku nieadaptacyjnych metod elementów skończonych funkcje kształtu definiuje się w trójwymiarowej przestrzeni wielomianów ustalonego stopnia p i dobiera się w ten sposób, aby przyjmowały one wartość równą 1 w punkcie elementu (węźle) odpowiadającym stopniowi swobody, któremu są przypisane. W punktach przypisanych pozostałym stopniom swobody przyjmują one wartość równą 0. Suma funkcji w dowolnym punkcie elementu równa jest 1.

$$\forall (a, b \in \overset{e}{A}) \quad (N_{ib}^e q_b^e = \delta_{ab} q_b^e) \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^E N_i^e = 1 \quad (5)$$

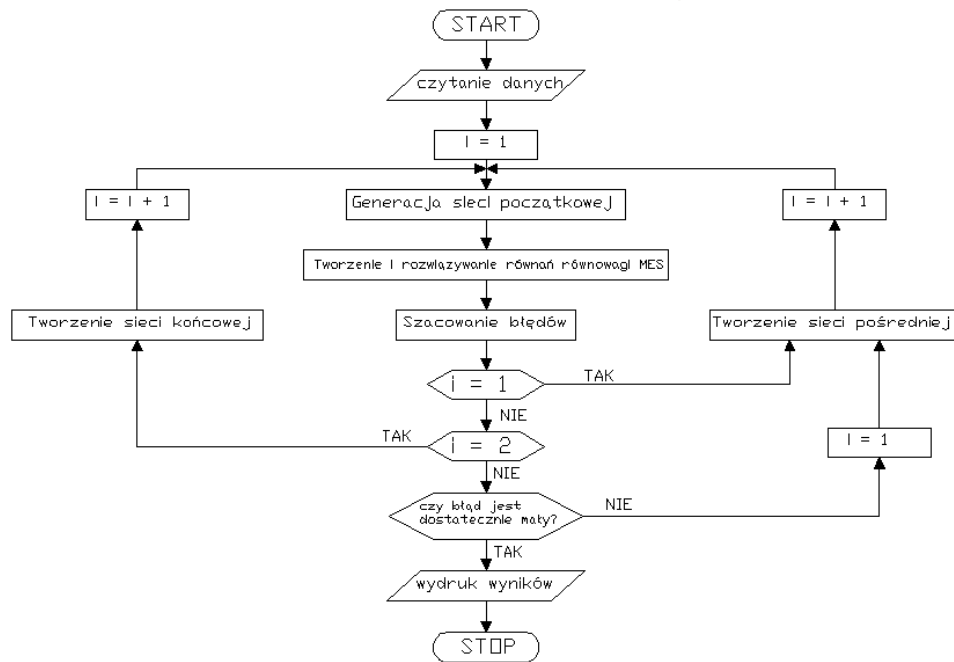
Poniższy rysunek 1 przedstawia przykład funkcji kształtu dla elementu jednowymiarowego stopnia drugiego ($n = 2$, $w = n + 1 = 3$).



Rys. 1. Hierarchiczne funkcje kształtu na przykładzie elementu jednowymiarowego stopnia drugiego: a) w węźle 1, b) w węźle 2, c) w węźle 3, d) suma wszystkich funkcji kształtu po przeskalowaniu przez hierarchiczne węzłowe stopnie swobody

W przypadku metod adaptacyjnych typu *hp* macierz klasycznych funkcji kształtu N zastępuje się macierzą χ tzw. hierarchicznych funkcji kształtu (rys. 1). Funkcje te są zdefiniowane niezależnie w wierzchołkach, na krawędziach, na ścianach i we wnętrzu elementu. Funkcje hierarchiczne umożliwiają łączenie elementów o różnych stopniach swobody. W oparciu o te funkcje buduje się macierze i wektory charakterystyczne (macierz sztywności, wektor sił), które wchodzi do równań globalnych MES. Wyprowadzenie tych równań znaleźć można w [1, 4].

W niniejszej pracy ograniczono się do przedstawienia trójkrokowego schematu adaptacyjnego metody elementów skończonych typu *hp* (rys. 2). Metoda ta polega na połączeniu metod *h* i *p*, z których każda zapewnia jedynie algebraiczny stopień rozwiązania.



Rys. 2. Ogólny algorytm adaptacyjnej metody elementów skończonych typu *hp*

Połączenie obu metod powoduje jakościową zmianę, która polega na uzyskaniu wykładniczego stopnia zbieżności. Podstawowa zależność opisująca zbieżność metody *hp* odzwierciedla fakt, że błąd aproksymacji jest odwrotnie proporcjonalny do stopnia aproksymacji i wprost proporcjonalny do wymiaru elementu:

$$\|e\|^2 \approx \eta^2 = \sum_{e=1}^E \eta_e^2 \sim \Lambda^2 \frac{h^{2\mu}}{p^{2\nu}} = \sum_{e=1}^E \Lambda_e^2 \frac{h_e^{2\mu}}{p_e^{2\nu}}, \quad (6)$$

gdzie:

h – wymiar elementu e ,

p – lokalny stopień aproksymacji,

μ, ν – są w ogólnym przypadku nieznane i zależą od charakteru problemu,

Λ – pewna stała zależna od typu zadania.

Powyższa zależność umożliwia powiązanie wymiaru h elementu e i/lub stopnia jego aproksymacji p z oszacowaną wartością błędu w elemencie η^2 .

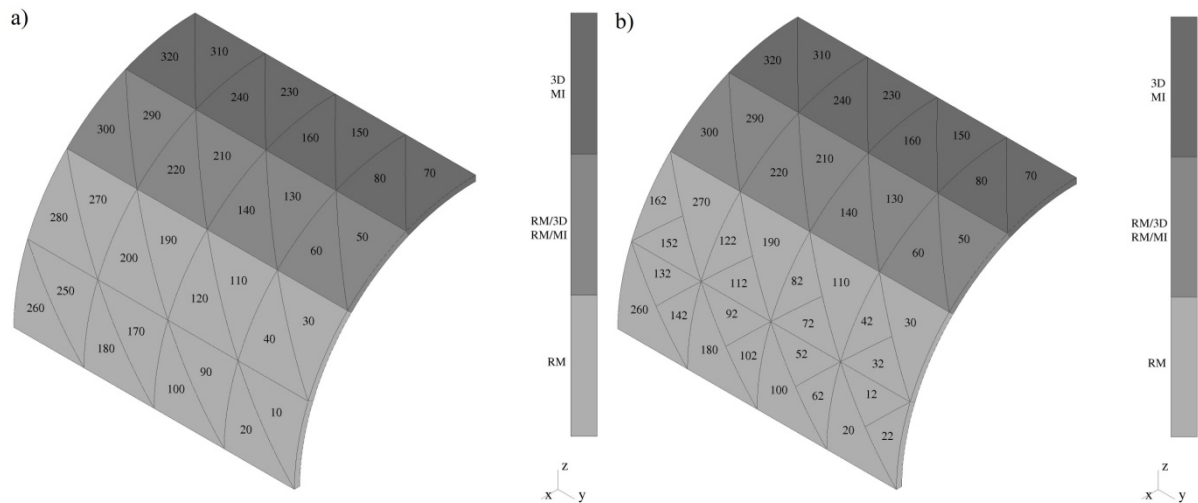
3. ANALIZA WYNIKÓW

W omawianych badaniach numerycznych rozpatrywano symetryczną ćwiartkę powłoki półwalcowej zdominowanej giętnie. W prezentowanej części analizy zastosowano siatkę równomierną $4 \times 4 \times 2$ elementów pryzmatycznych. Analizowano tzw. modele czyste powłoki oparte na teoriach podstawowych 3D lub RM (odpowiednio trójwymiarowa i powłokowa Reissnera–Mindlina) oraz modele mieszane, uwzględniające elementy 3D, 3D/RM i RM (odpowiednio trójwymiarowe, przejściowe, powłokowe). Podział na strefy odpowiadające modelom podstawowym i przejściowym prowadzono równoległe do brzegu prostoliniowego, ze zmiennym udziałem części powłokowej i trójwymiarowej w modelu. Strefa 3D przylegała do brzegu prostoliniowego. Strefa przejściowa składała się z jednej warstwy elementów przejściowych.

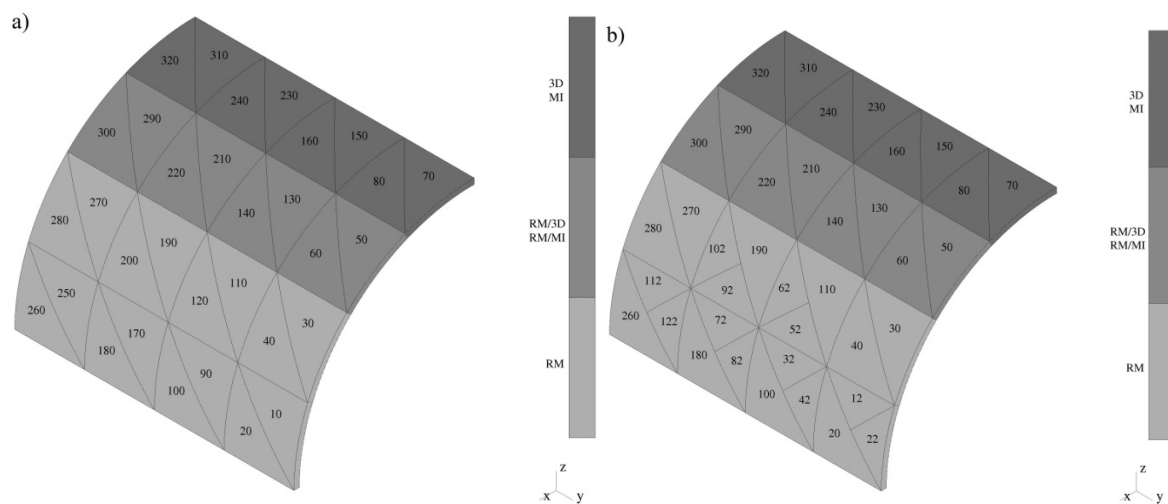
W prezentowanych badaniach numerycznych przedstawiono wyniki uzyskane podczas adaptacji typu hp . Głównym celem porównania wyników uzyskanych dla siatki początkowej i siatki po adaptacji jest ocena wpływu występowania elementów przejściowych w strukturze na proces adaptacji. Jak wspomniano wcześniej, adaptacji poddany będzie zarówno wymiar h elementu, jak również stopień p aproksymacji.

Prezentowane wyniki uzyskano przy zastosowaniu klasycznego modelu przejściowego oraz udoskonalonego modelu przejściowego. Porównane zostały siatki początkowe (rys. 3a-10a) oraz siatki uzyskane po adaptacji (rys. 3b-10b).

Siatka początkowa w przypadku obu wariantów modeli przejściowych była taka sama (rys. 3a i 4a). Siatka końcowa zależna jest od zastosowanego wariantu modelu przejściowego. Siatkę tę przedstawiono na rys. 3b i rys. 4b.

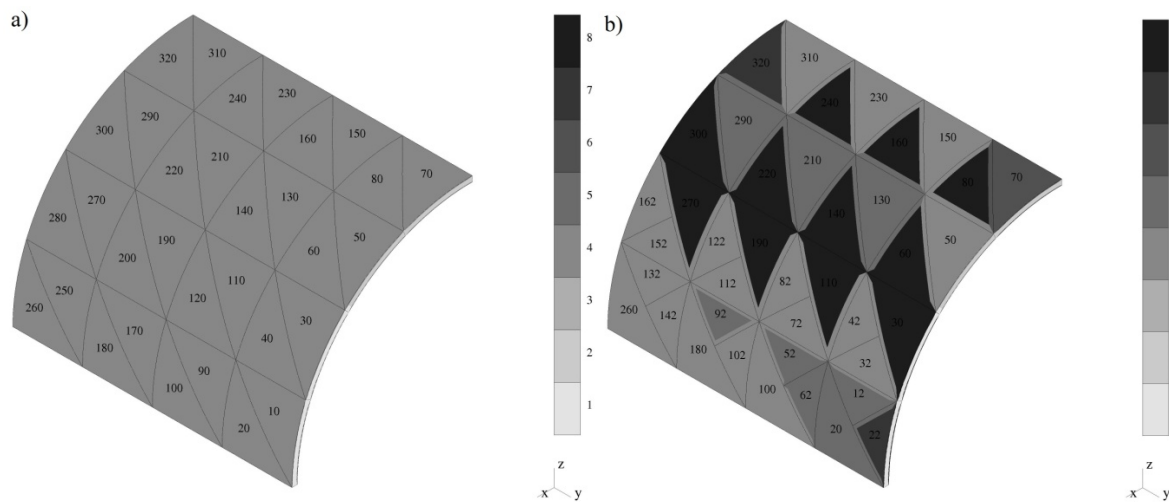


Rys. 3. Klasyczny element przejściowy – zastosowane modele mechaniczne – a) siatka początkowa, b) siatka końcowa

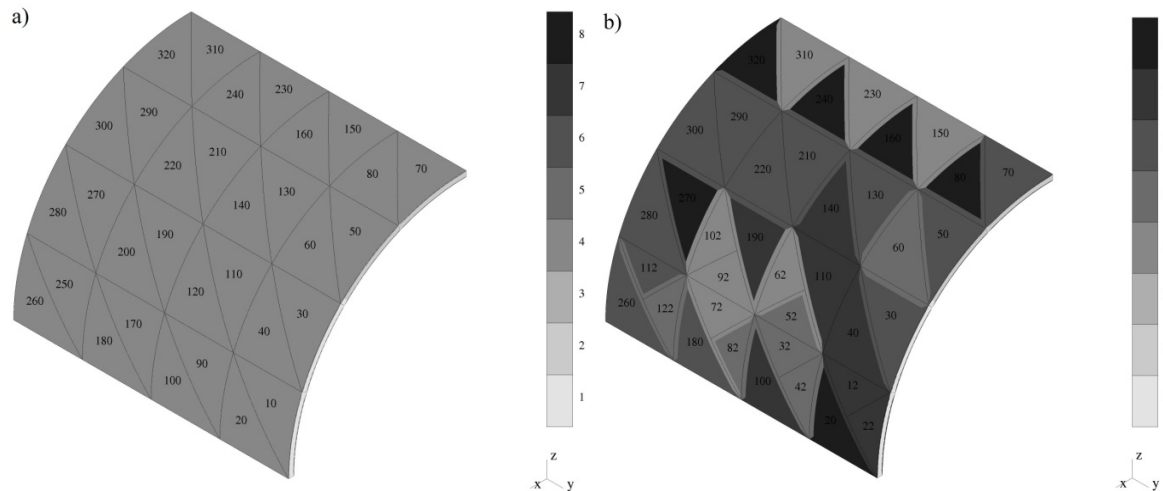


Rys. 4. Udoskonalony element przejściowy – zastosowane modele mechaniczne – a) siatka początkowa, b) siatka końcowa

Podobnie jak w przypadku rozkładu modeli w strukturze, stopień aproksymacji wzdłużnej w siatce początkowej (rys. 5a i rys. 6a) i końcowej (rys. 5b i rys. 6b) jest zależny od rozpatrywanych wariantów modeli przejściowych.

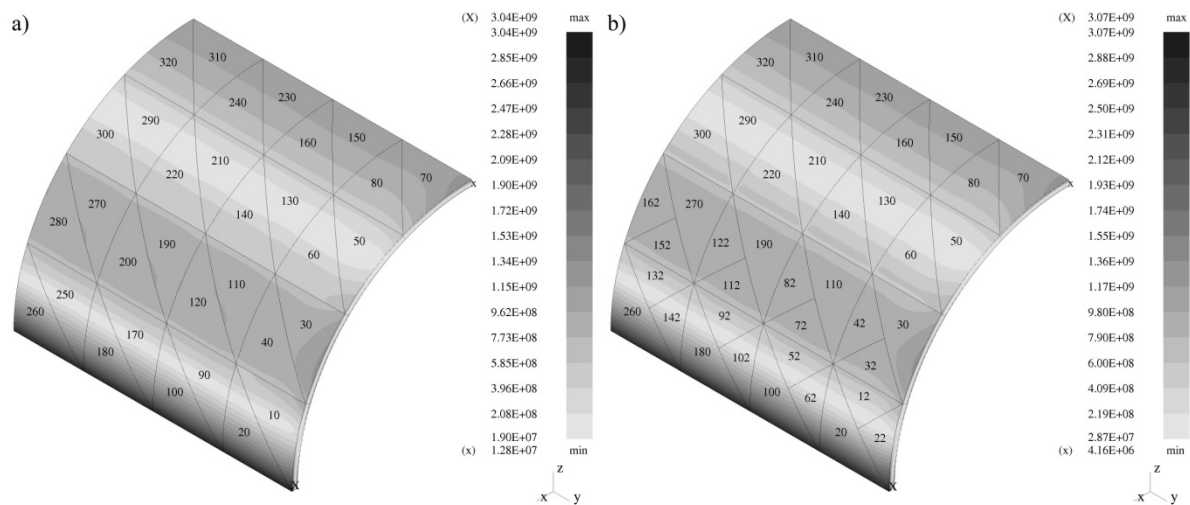


Rys. 5. Klasyczny element przejściowy – stopnie aproksymacji – a) siatka początkowa, b) siatka końcowa



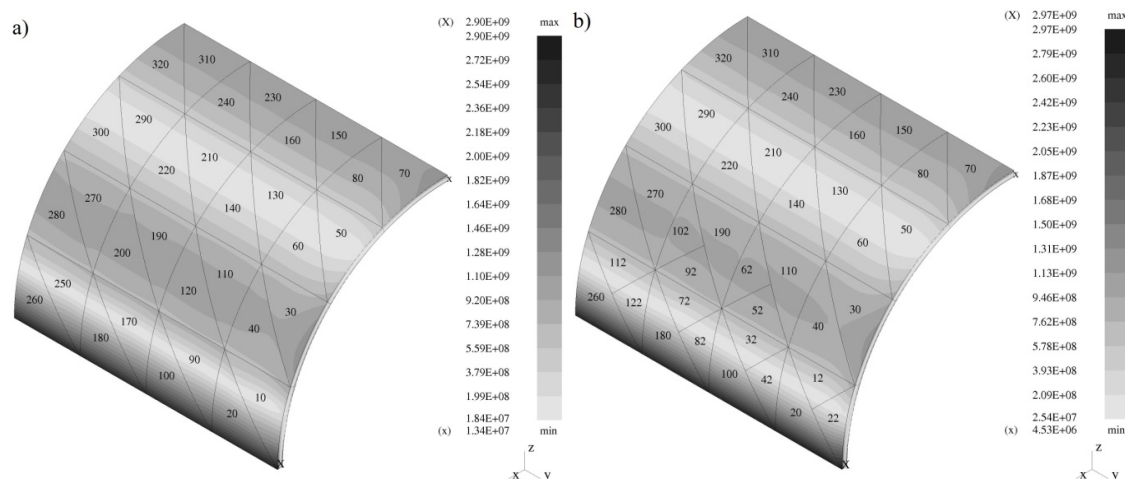
Rys. 6. Udoskonalony element przejściowy – stopnie aproksymacji – a) siatka początkowa, b) siatka końcowa

Analizując rozkład naprężeń w przypadku zastosowania klasycznego modelu przejściowego, zauważyć można, że zarówno w siatce początkowej (rys. 7a), jak i w siatce końcowej (rys. 7b) występuje wewnętrzna warstwa brzegowa na granicy modelu przejściowego i powłokowego pierwszego rzędu.



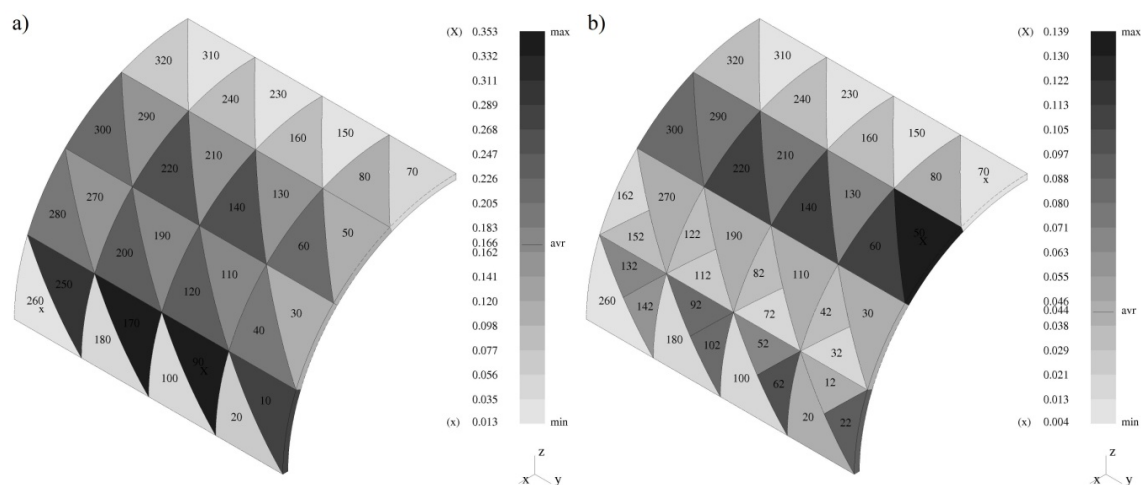
Rys. 7. Klasyczny element przejściowy – rozkład naprężeń efektywnych – a) siatka początkowa, b) siatka końcowa

Na poniższych ilustracjach można zauważyć, że zarówno w przypadku siatki początkowej (rys. 8a) jak i końcowej (rys. 8b), rozkład naprężeń efektywnych nie wykazał obecności wewnętrznej warstwy brzegowej. Oznacza to, że zarówno przed adaptacją sieci, jak i po adaptacji, występuje ciągłość naprężeń na granicy modelu przejściowego i powłokowego pierwszego rzędu.

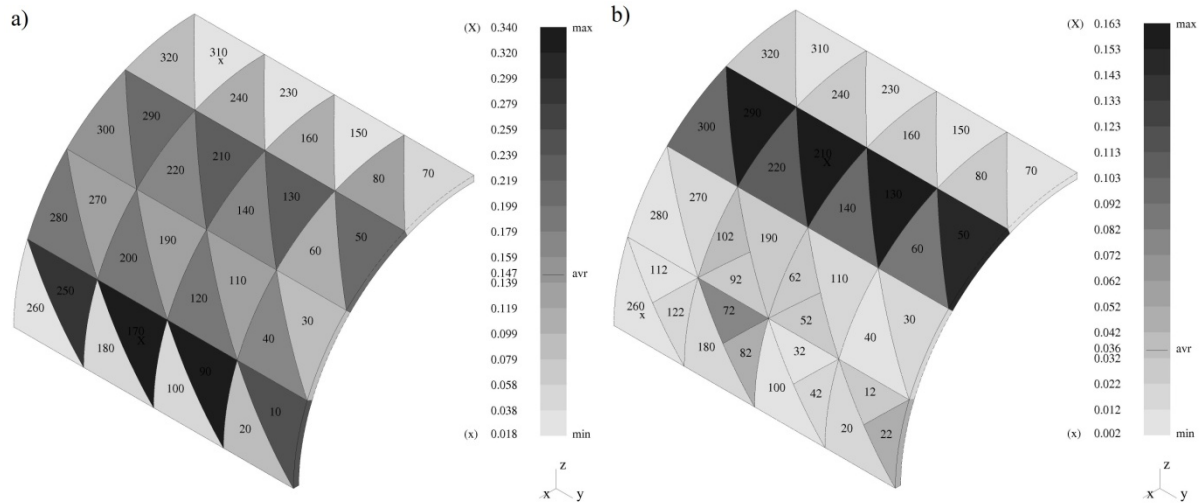


Rys. 8. Udoskonalony element przejściowy – rozkład naprężeń efektywnych – a) siatka początkowa, b) siatka końcowa

Porównując poniższe ilustracje (rys. 9 i rys. 10), można zauważyć, że zastosowany model przejściowy ma wpływ na poziom błędów aproksymacji. Zastosowanie udoskonalonego modelu przejściowego (rys. 10) zmniejsza zarówno maksymalny, jak i średni błąd aproksymacji w strukturze w porównaniu do wyników uzyskanych przy zastosowaniu klasycznego modelu przejściowego (rys. 9).



Rys. 9. Klasyczny element przejściowy – rozkład globalnych błędów aproksymacji: a) siatka początkowa, b) siatka końcowa



Rys. 10. Udoskonalony element przejściowy – rozkład globalnych błędów aproksymacji:
a) siatka początkowa, b) siatka końcowa

Analizując powyższe ilustracje, zauważyć można, że w przypadku obu zastosowanych modeli adaptacja sieci początkowej ma wpływ na poziom błędów. Względne wartości globalnego błędu aproksymacji są odpowiednio równe 0,166 i 0,044 (klasyczny model przejściowy) oraz 0,147 i 0,036 (udoskonalony model przejściowy), co oznacza zmniejszenie średniego błędu po przeprowadzeniu procesu adaptacji typu *hp*.

4. WNIOSKI

Zastosowanie klasycznego i udoskonalonego modelu przejściowego prowadzi do podobnego, choć nie jednakowego, poziomu błędów w strefie przejściowej i całej strukturze powłokowej. Skutkiem podobnego poziomu błędów jest podobny przebieg procesu adaptacji na krokach *h* i *p*.

Przedstawione przykłady potwierdzają efektywność przyjętego sposobu adaptacji w przypadku obu wariantów elementów przejściowych.

LITERATURA

- [1] Nosarzewska M.: *Zastosowanie elementów przejściowych w adaptacyjnej analizie struktur sprężystych*, praca magisterska, Wydział Nauk Technicznych, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski, Olsztyn, 2007.
- [2] Nosarzewska M., Zboiński G.: *Efektywność przejściowych elementów skończonych w hierarchicznym modelowaniu struktur złożonych*, „Modelowanie Inżynierskie”, 7 (38), (2009), 131-138.
- [3] Nosarzewska M., Zboiński G.: *Nowe elementy przejściowe do hierarchicznego modelowania i analizy struktur złożonych*, raport wewnętrzny, Nr arch. 583/09, Instytut Maszyn Przepływowych PAN, Gdańsk 2008.

- [4] Zboiński G.: *Modelowanie hierarchiczne i metoda elementów skończonych do adaptacyjnej analizy struktur złożonych*, „Zeszyt Naukowy IMP PAN w Gdańsku. Studia i materiały”, 520/1479/01, IMP PAN, Gdańsk, 2001.
- [5] Zboiński G.: *Unresolved problems of adaptive hierarchical modelling and hp-adaptive analysis within computational solid mechanics*, Computer Methods in Mechanics – Lectures of the CMM 2009. Seria: “Advanced Structural Materials”, t. 1 (red. M. Kuczma, K. Wilmański), Springer Verlag, Berlin, 2010, rozdz. 7, s. 113-147.
- [6] Zboiński G., Ostachowicz W.: *An Algorithm of a Family of 3D-Based, Solid-to-Shell, hpq/hp-Adaptive Finite Elements*, “Journal of Theoretical and Applied Mechanics”, 38 (2000), s. 791-806.
- [7] Zielińska M., Zboiński G.: *Efektywność przejściowych elementów skończonych w modelowaniu struktur złożonych zdominowanych membranowo*, „Mechanik”, 7 (2011), 11 i 967-972 (CD ROM).
- [8] Zielińska M., Zboiński G.: *Opracowanie zredukowanego numerycznie sformułowania adaptacyjnego, opartego na podejściu trójwymiarowym, bryłowo-powłokowego elementu przejściowego zapewniającego ciągłość pola naprężeń pomiędzy modelami podstawowymi*, raport wewnętrzny, Nr arch. 000/00, Instytut Maszyn Przepływowych PAN, Gdańsk, 2013.
- [9] Zielińska M., Zboiński G.: *Analiza płyt i powłok zdominowanych membranowo z ciągłą zmianą naprężeń i odkształceń w strefach przejściowych*, „Mechanik”, 7(2014), s. 601 i s. 855-872 (CD-ROM).
- [10] Zielińska M., Zboiński G.: *hp-Adaptive finite element analysis of thin-walled structures with use of the shell-to-shell transition elements*, [w:] *Recent Advances in Computational Mechanics*, (red. T. Łodygowski, J. Rakowski, P. Litewka), CRC Press, Londyn 2014, s. 63-72.
- [11] Nosarzewska M., Zboiński G.: *An algorithm of the enhanced 3D-based solid-to-shell transition elements for adaptive modelling and analysis of complex structures*, Short Papers of the 18th International Conference on Computer Methods in Mechanics, Zielona Góra (Poland), May 2009, 333-334.

Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2011/01/N/ST8/07786.