

I Krajowa Konferencja Naukowa
Szybkie prototypowanie
Modelowanie - Wytwarzanie - Pomiary
Rzeszów - Pstrągowa, 16 - 18 września 2015



Organizatorzy:



CENTRUM NAUKOWO TECHNICZNE

KLASTER SZYBKIEGO PROTOTYPOWANIA
RAPIDROM

Pomiar grubości zębów przekładni o wklęsło-wypukłym zarysie zębów typu Nowikowa

Tooth Thickness Measurements of Novikov Convexo-Concave Gears

MICHAŁ BATSCH
TADEUSZ MARKOWSKI*

DOI:10.17814/mechanik.2015.12.546

W pracy przedstawiono sposób wyznaczania wielkości pomiarowych odnoszących się do grubości zębów w przekroju normalnym na średnicy tocznej i podziałowej kół zębatych o wklęsło-wypukłym zarysie zębów typu Nowikowa. Ponadto dokonano analizy możliwości prowadzenia tego typu pomiarów suwmiarką modułową.

SŁOWA KLUCZOWE: grubość zęba, koła zębate o wklęsło-wypukłym zarysie typu Nowikowa

Paper presents the method of calculating measuring parameters which refers to tooth thickness in normal section on pitch and reference diameter of convexo-concave Novikov gears. Moreover the possibility of performing of such measurements by gear-tooth caliper was investigated.

KEYWORDS: tooth thickness, convexo-concave Novikov gears.

Wprowadzenie

Pomiary uzębień kół zębatych o nietypowym zarysie zębów do jakich zaliczają się koła zębate Nowikowa można wykonywać nowoczesnymi metodami takimi jak skanowanie skanerem laserowym, skanowanie optyczne czy też z wykorzystaniem współrzędnościowych maszyn pomiarowych [3].

Podczas procesu obróbki koła zębatego [1] istnieje jednak konieczność sprawdzania geometrii zębów na bieżąco. W przypadku wyżej wymienionych metod byłoby to znacznie utrudnione lub wręcz niemożliwe. Z tego względu należy wyprowadzić wzory pozwalające na obliczenie parametrów kół typu Nowikowa, które mogą być zmierzone za pomocą metod konwencjonalnych. Przykładem takich parametrów są grubości zębów w przekroju normalnym. Za ich pomocą

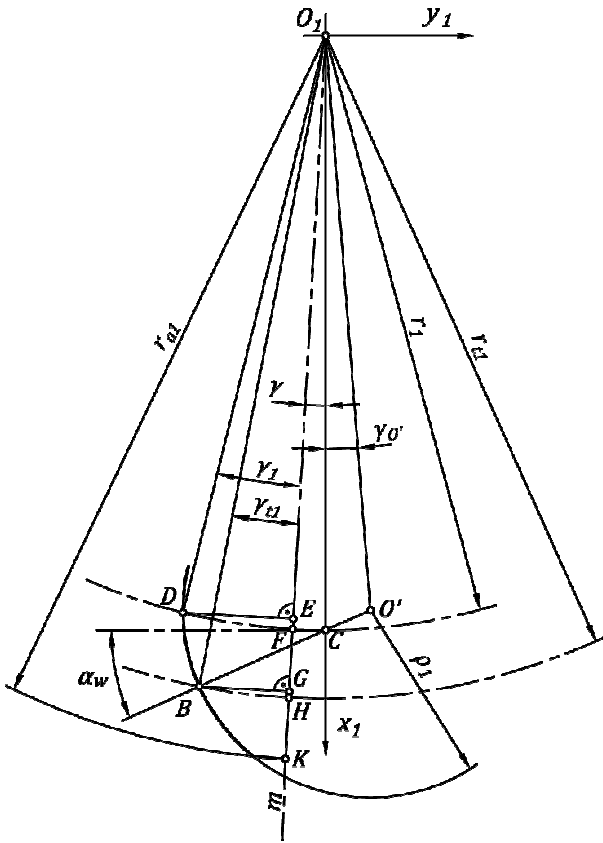
poprzez pomiar suwmiarką modułową można w sposób wygodny kontrolować dokładność oraz weryfikować poprawność procesu obróbki.

W niniejszym artykule przedstawiono sposób wyznaczania grubości zębów kół przekładni Nowikowa w przekroju normalnym na średnicy tocznej i podziałowej.

Grubość zęba wypukłego

Pomiar grubości zęba wypukłego można przeprowadzić na dowolnej średnicy, niemniej jednak wygodnie jest go prowadzić na średnicy podziałowej bądź tocznej. W celu wyznaczenia wielkości pomiarowych w przekroju normalnym należy wyznaczyć grubości zęba w przekroju czołowym. Na rysunku 1 przedstawiono przyjęty w obliczeniach zarys zęba w przekroju czołowym wraz z układem współrzędnych.

*Mgr inż. Michał Batsch (mbatsch@prz.edu.pl), Prof. dr hab. inż. Tadeusz Markowski (tmarkow@prz.edu.pl)



Rys. 1. Rysunek pomocniczy do wyznaczania grubości zęba wypukłego

Punkt D jest punktem przecięcia okręgu podziałowego o promieniu r_1 z zarysem zęba o promieniu $\rho_1 = |BO'|$. Podobnie punkt B jest punktem przecięcia okręgu tocznego o promieniu r_{t1} z zarysem zęba. Kąt γ_{t1} jest środkowym kątem odpowiadającym połowie grubości zęba po łuku o średnicy podziałowej (łuk \widehat{DF}). Kąt γ_{tn1} jest kątem środkowym odpowiadającym połowie grubości zęba po łuku o średnicy tocznej (łuk \widehat{BH}). Grubość zęba po łuku okręgu podziałowego w przekroju czołowym oznaczono jako \widehat{s}_{c1} , natomiast w przekroju normalnym jako \widehat{s}_{n1} . Podobnie grubość zęba po łuku okręgu tocznego w przekroju czołowym oznaczono jako \widehat{s}_{tc1} , natomiast w przekroju normalnym jako \widehat{s}_{tn1} . Oś m jest osią symetrii zęba wypukłego, która jest pochylona do osi odciętych pod kątem γ .

Grubość zęba po łuku okręgu podziałowego w przekroju normalnym wyraża się wzorem (1)

$$\widehat{s}_{n1} = \widehat{s}_{c1} \cos \beta \quad (1)$$

gdzie: β to kąt pochylenia linii zęba na średnicy podziałowej.

Wykorzystując zależność (1) można wyznaczyć pomiarową grubość zęba wzdłuż cięciwy okręgu podziałowego w przekroju normalnym jako [2]:

$$g_{p1} = d_{1zast} \sin \frac{\widehat{s}_{n1}}{d_{1zast}} = d_{1zast} \sin \frac{\widehat{s}_{c1} \cos \beta}{d_{1zast}} \quad (2)$$

gdzie: $d_{1zast} = \frac{d_1}{\cos^2 \beta}$ to zastępcza średnica podziałowa.

Wysokość pomiarowa określona będzie zależnością (3) [2]:

$$h_{p1} = h_{a1} + \frac{d_{1zast}}{2} \left(1 - \cos \frac{\widehat{s}_{n1}}{d_{1zast}} \right) = h_{a1} + \frac{d_{1zast}}{2} \left(1 - \cos \frac{\widehat{s}_{c1} \cos \beta}{d_{1zast}} \right) \quad (3)$$

Grubość zęba po łuku okręgu tocznego w przekroju normalnym wyraża się wzorem (4)

$$\widehat{s}_{tn1} = \widehat{s}_{tc1} \cos \beta_{t1} \quad (4)$$

gdzie: $\beta_{t1} = \arctg \frac{d_{t1} \tan \beta}{d_1}$ to kąt pochylenia linii zęba na średnicy tocznej, $d_{t1} = 2\sqrt{(\rho_1 - d_{CO'})^2 + 2r_1(\rho_1 - d_{CO'}) \sin \alpha_w + r_1^2}$ to średnica toczna.

Chcąc obliczyć wielkości pomiarowe dla średnicy tocznej we wzorach (2) i (3) należy zamiast zastępczej średnicy podziałowej d_{1zast} wprowadzić zastępczą średnicę toczną d_{t1zast} , zamiast wysokości głowy zęba h_{a1} wprowadzić długość odcinka $|KH|$ oraz zamiast grubości zęba po łuku na średnicy podziałowej \widehat{s}_{n1} wprowadzić grubość zęba po łuku na średnicy tocznej \widehat{s}_{tn1} . Uzyska się wówczas zależności:

$$g_t = d_{t1zast} \sin \frac{\widehat{s}_{tn1}}{d_{t1zast}} = d_{t1zast} \sin \frac{\widehat{s}_{c1} \cos \beta_{t1}}{d_{t1zast}} \quad (5)$$

$$h_t = r_{a1} - \frac{d_{t1}}{2} + \frac{d_{t1zast}}{2} \left(1 - \cos \frac{\widehat{s}_{tn1}}{d_{t1zast}} \right) = r_{a1} - \frac{d_{t1}}{2} + \frac{d_{t1zast}}{2} \left(1 - \cos \frac{\widehat{s}_{c1} \cos \beta_{t1}}{d_{t1zast}} \right) \quad (6)$$

gdzie: $d_{t1zast} = \frac{d_{t1}}{\cos^2 \beta_{t1}}$ to zastępcza średnica toczna.

Aby możliwe było wyznaczenie wielkości (5) i (6) należy wyznaczyć grubość zęba po łuku okręgu tocznego w przekroju czołowym.

Na podstawie twierdzenia cosinusów w trójkącie $\triangle DO_1O'$ można wyznaczyć kąt $\sphericalangle DO_1O'$ jako (7)

$$\sphericalangle DO_1O' = \arccos \frac{2r_1^2 - 2r_1 d_{CO'} \sin \alpha_w + d_{CO'}^2 - \rho_1^2}{2r_1 \sqrt{r_1^2 - 2r_1 d_{CO'} \sin \alpha_w + d_{CO'}^2}} \quad (7)$$

Z kolei w wyniku zastosowania twierdzenia sinusów w trójkącie $\triangle CO_1O'$ kąt pomiędzy odcinkiem $O'O_1$, a osią x_1 dany będzie wzorem:

$$\gamma_{O'} = \arcsin \frac{d_{CO'} \cos \alpha_w}{\sqrt{r_1^2 - 2r_1 d_{CO'} \sin \alpha_w + d_{CO'}^2}} \quad (8)$$

Kąt pomiędzy odcinkiem DO_1 , a osią symetrii zęba dany określa wzór (9)

$$\gamma_1 = \frac{\widehat{s}_{c1}}{d_1} \quad (9)$$

Wówczas kąt pochylenia prostej m określony będzie zależnością (10) w postaci:

$$\gamma = \sphericalangle DO_1O' - \gamma_{O'} - \gamma_1 = \arccos \frac{2r_1^2 - 2r_1 d_{CO'} \sin \alpha_w + d_{CO'}^2 - \rho_1^2}{2r_1 \sqrt{r_1^2 - 2r_1 d_{CO'} \sin \alpha_w + d_{CO'}^2}} -$$

$$\arcsin \frac{d_{CO'} \cos \alpha_w}{\sqrt{r_1^2 - 2r_1 d_{CO'} \sin \alpha_w + d_{CO'}^2}} - \frac{\widehat{s}_{c1}}{d_1} \quad (10)$$

Rzędna punktu B wyraża się wzorem (11):

$$y_B = -(\rho_1 - d_{CO})\cos\alpha_w \quad (11)$$

Na jej podstawie można obliczyć kąt γ_{t1} jako (12)

$$\gamma_{t1} = \arcsin \frac{|y_B|}{r_{t1}} - \gamma \quad (12)$$

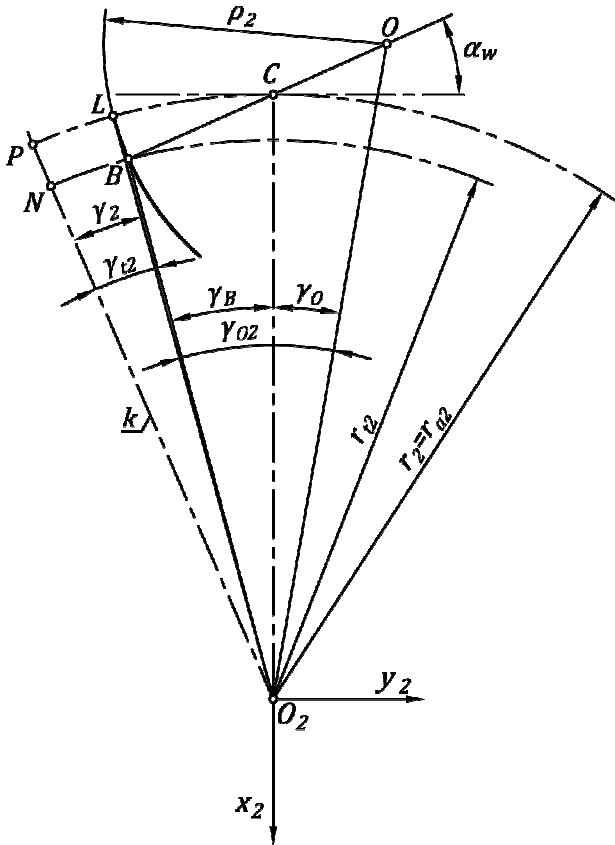
gdzie $r_{t1}=d_{t1}/2$ to promień toczy.

Ostatecznie korzystając z zależności (12) ze wzoru (13) wyznacza się poszukiwaną grubość zęba po łuku okręgu toczonego w przekroju czołowym:

$$s_{tc1} = d_{t1}\gamma_{t1} \quad (13)$$

Grubość zęba wklęsłego

Podobnie jak w przypadku zęba wypukłego pomiar grubości zęba wklęsłego można prowadzić na dowolnej średnicy. W niniejszym podpunkcie wyznaczono wielkości pomiarowe na średnicy toczonej oraz podziałowej. W przypadku, w którym średnica podziałowa pokrywa się ze średnicą wierzchołków pomiar grubości na jej wysokości może nie być możliwy ze względu na występujące zaokrąglenie głowy zęba. Rysunek 3.1 przedstawia przyjęty do obliczeń zarys zęba wklęsłego w przekroju czołowym.



Rys. 2. Rysunek pomocniczy do wyznaczenia grubości zęba wklęsłego

Punkt L jest punktem przecięcia okręgu podziałowego o promieniu r_2 z zarysem zęba o promieniu $\rho_2=|BO|$. Podobnie punkt B jest punktem przecięcia okręgu toczonego o promieniu r_{t2} z zarysem zęba. Kąt γ_2 jest środkowym kątem odpowiadającym połowie grubości zęba po łuku o średnicy podziałowej (łuk \widehat{PL}). Kąt γ_{t2} jest kątem środkowym odpowiadającym połowie grubości zęba po łuku o średnicy

toczonej (łuk \widehat{NB}). Grubość zęba po łuku okręgu podziałowego w przekroju czołowym oznaczono jako s_{c2} , natomiast w przekroju normalnym jako s_{n2} . Podobnie grubość zęba po łuku okręgu toczonego w przekroju czołowym oznaczono jako s_{tc2} , natomiast w przekroju normalnym jako s_{tn2} . Oś k jest osią symetrii zęba wklęsłego.

Grubość zęba po łuku okręgu podziałowego w przekroju normalnym wyraża się wzorem (14)

$$s_{n2} = s_{c2}\cos\beta \quad (14)$$

gdzie: β to kąt pochylenia linii zęba na średnicy podziałowej.

Wykorzystując zależność (15) można wyznaczyć pomiarową grubość zęba wzdłuż cięciwy okręgu podziałowego w przekroju normalnym [2]

$$g_{p2} = d_{2zast}\sin \frac{s_{n2}}{d_{2zast}} = d_{1zast}\sin \frac{s_{c2}\cos\beta}{d_{2zast}} \quad (15)$$

gdzie: $d_{2zast} = \frac{d_2}{\cos^2\beta}$ to zastępcza średnica podziałowa.

Wysokość pomiarowa określona będzie zależnością (16) [2] w postaci:

$$h_{p2} = h_{a2} + \frac{d_{2zast}}{2} \left(1 - \cos \frac{s_{n2}}{d_{2zast}}\right) = h_{a2} + \frac{d_{2zast}}{2} \left(1 - \cos \frac{s_{c2}\cos\beta}{d_{2zast}}\right) \quad (16)$$

Grubość zęba po łuku okręgu toczonego w przekroju normalnym wyraża się wzorem (17)

$$s_{tn2} = s_{tc2}\cos\beta_{t2} \quad (17)$$

gdzie: $\beta_{t2} = \arctg \frac{d_{t2}tg\beta}{d_2}$ to kąt pochylenia linii zęba na średnicy toczonej, $d_{t2} = 2\sqrt{(\rho_1 - d_{CO})^2 + 2r_2(\rho_1 - d_{CO})\sin\alpha_w + r_2^2}$ to średnica toczonej.

Chcąc obliczyć wielkości pomiarowe dla średnicy toczonej we wzorach (15) i (16) należy zamiast zastępczej średnicy podziałowej d_{2zast} wprowadzić zastępczą średnicę toczonej d_{t2zast} , zamiast wysokości głowy zęba h_{a2} wprowadzić długość odcinka $|PN|$ oraz zamiast grubości zęba po łuku średnicy podziałowej s_{n2} wprowadzić grubość zęba po łuku średnicy toczonej s_{tn2} . Uzyska się wówczas zależności:

$$g_{t2} = d_{t2zast}\sin \frac{s_{tn2}}{d_{t2zast}} = d_{t2zast}\sin \frac{s_{tc2}\cos\beta_{t2}}{d_{t2zast}} \quad (18)$$

$$h_{t2} = r_{a2} - \frac{d_{t2}}{2} + \frac{d_{t2zast}}{2} \left(1 - \cos \frac{s_{tn2}}{d_{t2zast}}\right) = r_{a2} - \frac{d_{t2}}{2} + \frac{d_{t2zast}}{2} \left(1 - \cos \frac{s_{tc2}\cos\beta_{t2}}{d_{t2zast}}\right) \quad (19)$$

gdzie: $d_{t2zast} = \frac{d_{t2}}{\cos^2\beta_{t2}}$ to zastępcza średnica toczonej.

Aby możliwe było wyznaczenie wielkości (18) i (19) należy wyznaczyć grubość zęba po łuku na okręgu toczonej w przekroju czołowym.

Współrzędne środka zarysu zęba wklęsłego określone są wzorami:

$$\begin{aligned} x_0 &= -r_2 - (\rho_1 - \rho_2 + d_{CO})\cos\alpha_w \\ y_0 &= (\rho_1 - \rho_2 + d_{CO})\cos\alpha_w \end{aligned} \quad (20)$$

Na ich podstawie można wyznaczyć kąt pomiędzy odcinkiem $|OO_2|$, a osią x_2 jako

$$\gamma_O = \arcsin \frac{(\rho_1 - \rho_2 + d_{CO}) \cos \alpha_w}{\sqrt{r_2^2 - 2r_2(\rho_1 - \rho_2 + d_{CO}) \sin \alpha_w + (\rho_1 - \rho_2 + d_{CO})^2}} \quad (21)$$

Korzystając z twierdzenia cosinusów w trójkącie ΔO_2LO można wyznaczyć kąt pomiędzy odcinkami LO_2 i OO_2 jako

$$\gamma_{O2} = \arccos \frac{2r_2^2 - 2r_2(\rho_1 - \rho_2 + d_{CO}) \sin \alpha_w + (\rho_1 - \rho_2 + d_{CO})^2 - \rho_2^2}{2r_2 \sqrt{r_2^2 - 2r_2(\rho_1 - \rho_2 + d_{CO}) \sin \alpha_w + (\rho_1 - \rho_2 + d_{CO})^2}} \quad (22)$$

Ponadto kąt pomiędzy odcinkiem BO_2 , a osią x_2 dany jest zależnością

$$\gamma_B = \arcsin \frac{2(\rho_1 - d_{CO}) \cos \alpha_w}{d_{t2}} \quad (23)$$

Środkowy kąt odpowiadający połowie grubości zęba po łuku na średnicy podziałowej wyraża się wzorem

$$\gamma_2 = \frac{s_{c2}}{a_2} \quad (24)$$

Na podstawie rysunku 2 oraz zależności (22)-(24) można wyznaczyć kąt środkowy odpowiadający połowie grubości zęba po łuku okręgu tocznego jako

$$\gamma_{t2} = \gamma_{O2} - \gamma_B - \gamma_O + \gamma_2 \quad (25)$$

Ostatecznie wykorzystując zależność (25) we wzorze (26) uzyskuje się poszukiwaną grubość zęba po łuku okręgu tocznego w przekroju czołowym

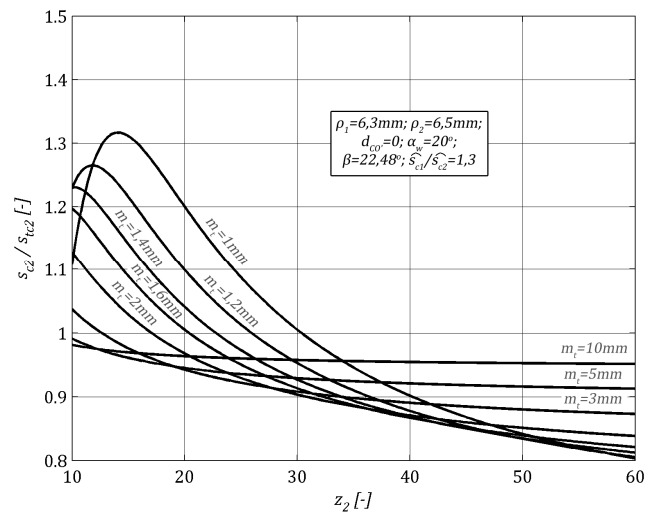
$$\widehat{s_{tc2}} = d_{t2} \gamma_{t2} \quad (26)$$

Analiza możliwości przeprowadzenia pomiaru uzębienia wklęsłego

Aby pomiar grubości zęba przy pomocy suwmiarki modułowej był możliwy wspomniana grubość musi się zwiększać począwszy od wierzchołka zęba w kierunku jego stopy. Dotyczy to w szczególności zębów wklęsłych, dla których może wystąpić przypadek, w którym grubość zęba na średnicy podziałowej jest większa od grubości zęba na średnicy tocznej. Aby zapewnić możliwość przeprowadzenia pomiaru grubości zęba na średnicy tocznej uzębienia wklęsłego musi zostać spełniony warunek: $\widehat{s_{c2}} < \widehat{s_{tc2}}$. Powyższy warunek można wyrazić nierównością (27)

$$\frac{\widehat{s_{c2}}}{\widehat{s_{tc2}}} < 1 \quad (27)$$

Rysunek 3 przedstawia stosunek grubości zęba w przekroju czołowym na średnicy podziałowej do grubości zęba w przekroju czołowym na średnicy tocznej w zależności od liczby zębów koła o uzębieniu wklęsłym oraz jego modułu czołowego. Dla przykładowego koła o uzębieniu wklęsłym pomiar grubości zęba na średnicy tocznej przy pomocy suwmiarki modułowej dla modułu czołowego 1mm może zostać zrealizowany gdy liczba zębów przekroczy 30 (spełniona nierówność (27)). Im moduł czołowy jest większy tym graniczna liczba zębów, powyżej której pomiar będzie możliwy maleje. Dla modułu $1,6\text{mm}$ wynosi ona 20. Dla dużych modułów (powyżej 3mm) pomiar grubości zęba możliwy jest w zasadzie dla dowolnie dużej liczby zębów.



Rys. 3. Stosunek grubości zęba w przekroju czołowym na średnicy podziałowej do grubości zęba w przekroju czołowym na średnicy tocznej w zależności od liczby zębów koła o uzębieniu wklęsłym oraz jego modułu czołowego

Podsumowanie i wnioski

W artykule przedstawiono sposób wyznaczania wielkości pomiarowych odnoszących się do grubości zębów w przekroju normalnym na średnicy tocznej oraz podziałowej kół zębatach o wklęsło-wypukłym zarysie typu Nowikowa. Ponadto dokonano analizy możliwości prowadzenia takiego pomiaru suwmiarką modułową dla uzębienia wklęsłego. Stwierdzono, że im moduł czołowy jest mniejszy tym graniczna liczba zębów, powyżej której pomiar jest możliwy rośnie. Dla dużych modułów pomiar możliwy jest dla praktycznie dowolnie dużej liczby zębów. Oczywiście uzyskane wyniki odnoszą się dla przykładowej pary zębataj o parametrach podanych na rysunku 3. W przypadku innych parametrów przebiegi pokazane na rysunku 3 zmieniają się, natomiast ich charakter pozostanie taki sam.

W podobny sposób jak ten przedstawiony w niniejszym opracowaniu można analizować grubość zęba u wierzchołka. Jest to istotne szczególnie dla zębów obrobionych cieplnie do dużej twardości (nawęglanych, azotowanych). Wówczas bowiem tak jak w przypadku przekładni ewolwentowych grubość zęba u wierzchołka nie może być zbyt mała.

Podziękowania

Badania realizowane w ramach Projektu "Nowoczesne technologie materiałowe stosowane w przemyśle lotniczym", Nr POIG.01.01.02-00-015/08-00 w Programie Operacyjnym Innowacyjna Gospodarka (PO IG). Projekt współfinansowany przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego.

LITERATURA

1. Batsch M., Markowski T.: Matematyczny model obróbki kształtowej uzębień o kołowo-łukowym zarysie zębów typu Nowikowa, XIX Ogólnopolska Konferencja Naukowo-Techniczna Przekładnie Zębata i XXI Międzynarodowa Konferencja Naukowo-Techniczna Koła Zębata KZ, Wisła 25.11-27.11.2014
2. Ochęduszek K.: Koła zębata T.3 Sprawdzenie. WNT, Warszawa 1985.
3. Przekładnie zębata o nietypowym ząbieniu – modelowanie, prototypowanie, badania stanowiskowe. pod red. T. Markowskiego. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2009.