

Prof. dr hab. inż. Wiesław Tarelko  
Wydział Mechaniczny  
Akademia Morska w Gdyni

## METODA WARIACYJNA FORMUŁOWANIA MODELI SYSTEMÓW DYNAMICZNYCH W MECHANICE

### STRESZCZENIE

Ogólnie rzecz ujmując, wyróżnia się dwa podstawowe rodzaje badań naukowych w celu uzyskania modelu matematycznego, tj. metoda opisowa oraz metody analityczne. Z ich wykorzystaniem uzyskuje się dwa różne rodzaje modeli matematycznych: modele opisowe oraz modele przyczynowe. W mechanice wykorzystywane są głównie modele przyczynowe, które ‘wnikają’ w przyczyny obserwowanego zjawiska, tzn. pozwalają poznać jego mechanizm fizyczny. Wyróżnia się przy tym dwie metody budowy tych modeli, a mianowicie bilansową (równania bilansowe) oraz wariacyjną (równania wariacyjne). Zagadnienia związane z budową poszczególnych rodzajów modeli przedstawiono w dwóch powiązanych ze sobą artykułach. Niniejszy artykuł dotyczy zagadnień związanych z budową modelu przyczynowego z wykorzystaniem metody wariacyjnej. W szczególności zaś, przedstawiono proces tworzenia tego rodzaju modelu na przykładzie wahadła matematycznego. Natomiast w pierwszym z wymienionych artykułów zaprezentowano budowę modelu opisowego oraz modelu przyczynowego do budowy którego wykorzystano metodę bilansową.

**Słowa kluczowe:** modelowanie, metoda wariacyjna, mechanika, systemy dynamiczne

## VARIATIONAL METHOD OF BUILDING DYNAMICAL SYSTEM MODELS IN MECHANICS

### SUMMARY

Generally, we can distinguish two main types of research enables to receive a mathematical model: qualitative and quantitative. Using these methods we can obtain two different types of mathematical models: descriptive and explanatory models respectively. In mechanics, we mainly use the explanatory models, which indicate a cause-effect relationship in the studied phenomenon. We could distinguish two fundamental methods of developing the explanatory models, namely: balance (balance equations) and variational methods (variational equations). This paper deal with the explanatory model obtained by means of the variational method. Particularly, based on the exemplar of the mathematical pendulum the creation process of such model is presented.

**Keywords:** modeling, variational method, mechanics, dynamical systems

### 1. WPROWADZENIE

W XVII wieku rachunek różniczkowy i całkowy stał się podstawą budowy modeli matematycznych w fizyce, a także w innych dziedzinach inżynierskich, np. w mechanice. Powszechnie znany jest spór pomiędzy Newtonem i Leibnizem o autorstwo nowej dziedziny matematyki. W Europie nikt nie chciał uwierzyć, że Newton kilkanaście lat przed Leibnizem miał tak duże dokonania w rachunku różniczkowym i całkowym. Newton, który nazywał osiągnięcia w tym zakresie fluksjami i kwadraturami, swoich wyników nigdy nie opublikował. Z tego względu trudno było udowodnić, że wcześniej od Leibniza uzyskał on tak istotne dla nauki wyniki. Newton uważał, że Leibniz musiał coś zacerpnąć z jego rękopisów, kiedy odwiedził Anglię (nie spotkali się osobiście, ale Leibniz konferował z ludźmi posiadającymi pewne prace Newtona).

W 1691 roku Jan Bernoulli, młody szwajcarski matematyk spotkał nieco starszego francuskiego markiza de L’Hopital’a [1]. Bernoulli pokazał swój niepublikowaną pracę dotyczącą promienia krzywizny dowolnej krzywej. Szwajcar był w tym okresie najwybitniejszym w Europie ekspertem, znającym nowe metody rachunku różniczkowego i całkowego Leibniza. Markiz de L’Hopital zaczął brać u Bernoulliego lekcje, a po trzech latach zaproponował następujący układ: będzie Szwajcarowi wypłacał pensję roczną wysokości co najmniej 300 ówczesnych liwrów w zamian za możliwość dyskretnego otrzymywania części jego wyników naukowych wraz z możliwością publikowania ich przez markiza jako własne. W 1696 roku de L’Hopital opublikował anonimowo pierwszy podręcznik rachunku różniczkowego i całkowego *Analyse des infiniment petits pour l’intelligence des lignes courbes* (‘Analiza nieskończenie małych w celu badania linii krzywych’). Wówczas to umowa między Bernoulli’em i L’Hopital’em stała się nieważna, i to pomimo faktu, że w przedmowie de L’Hopital zadeklarował ogólnikowo, iż wiele zawdzięcza Janowi Bernoulliemu. Co prawda de L’Hopital nigdy nie twierdził, że jest odkrywcą tej metody, jednakże opublikował ją bez skonsultowania się z Bernoullim. Dzisiaj każdy kto uczył się o granicach funkcji, musiał się zetknąć z regułą de L’Hopital’a, którą wymyślił Jan Bernoulli, ale po dziś dzień wszyscy nazywają ją regułą de L’Hopitala.

Znajomość rachunku różniczkowego i całkowego umożliwia rozwiązywać w sposób systematyczny różne problemy związane z osiąganiem maksimum albo minimum danej funkcji. Pojawiły się także problemy bardziej ogólne, w których szukano nie jakiegoś punktu na krzywej, ale samej krzywej. Przykładowo, mamy zadane dwa punkty i interesuje nas, jaką krzywą należy połączyć dwa punkty, aby koralik nanizany na krzywą i ślizgający się bez tarcia dotarł do punktu położonego niżej w najkrótszym czasie. Możemy sobie wyobrazić różne krzywe i dla każdej sprawdzać, ile czasu zajmie koralikowi

przebycie całej drogi. To jest właśnie problem brachistochrony – czyli krzywej najkrótszego spadku. W roku 1696 Jan Bernoulli znalazł rozwiązanie i nie opublikował go, lecz rozesłał on prośbę o rozwiązanie tej zagadki do ‘najwybitniejszych matematyków na świecie’, jednocześnie ustalił termin – sześć miesięcy – na nadesłanie rozwiązania [3].

Na tak sformułowane zagadnienie odpowiedzi nadesłało czterech najwybitniejszych matematyków w ówczesnym świecie, a mianowicie Leibniz, de L'Hopital, Newton oraz Jakub starszy brat Jana Bernoulli'ego.

Leibniz nie tylko rozwiązał problem, ale podał (prawidłowo!) nazwiska wszystkich matematyków, którzy z nim się uporają. Newton, będący już w nienajlepszej kondycji psychicznej, po otrzymaniu wyzwania zamknął się na cały wieczór w swojej pracowni i wyszedł z niej o czwartej rano z gotowym rozwiązaniem. Natomiast istnieją podejrzenia, że Jakub Bernoulli zapoznał się z rozwiązaniem brata jeszcze przed ogłoszeniem konkursu.

Rozwiązania zostały opublikowane w ‘Acta Eruditorum’ w 1697 roku. Na ich podstawie powstała specjalna gałąź matematyki, tzw. rachunek wariacyjny, badająca w sposób systematyczny różne zagadnienia tego typu.

W [4] zaprezentowano dwie podstawowe metody tworzenia modeli matematycznych w mechanice, a mianowicie:

- metodę opisową, za pomocą której uzyskuje się model opisowy,
- metody analityczne, za pomocą których uzyskuje się model przyczynowy.

Z kolei modele przyczynowe można zbudować za pomocą metody bilansowej oraz metody wariacyjnej.

Metoda bilansowa zaprezentowana w [4] jest procedurą tworzenia modeli przyczynowych systemów dynamicznych w mechanice z wykorzystaniem rachunku różniczkowego i całkowego, a polegającą na bilansowaniu wielkości, które podporządkowane są zasadom zachowania.

Natomiast metoda wariacyjna polega na tworzeniu modeli przyczynowych systemów dynamicznych w mechanice z wykorzystaniem rachunku wariacyjnego, którego celem jest znajdowanie funkcji, która minimalizuje funkcjonal (całkę w zagadnieniu wariacyjnym).

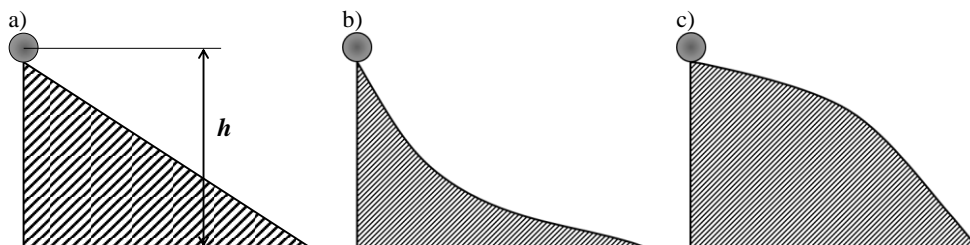
Metody analityczne za pomocą których uzyskuje się model przyczynowy umożliwiają ‘wniknięcie’ w przyczyny obserwowanego zjawiska, tzn. pozwalają poznać jego mechanizm fizyczny.

Celem niniejszego artykułu jest zaprezentowanie metod wariacyjnej, przy czym proces tworzenia modelu przyczynowego przedstawiono na przykładzie wahadła matematycznego.

## 2. RACHUNEK WARIACYJNY

W celu zaprezentowania istoty rachunku wariacyjnego, którego nazwę zaproponował Euler, rozpatruje się ruch kulki o masie  $m$  po torach o różnych kształtach (zjeżdżalniach):

- o linii prostej (równa pochyła) (rys. 1a),
- o linii wklęsłej (rys. 1b),
- o linii wypukłej (rys. 1c).



Rys. 1. Tory o linii: a) prostej; b) wklęsłej; c) wypukłej

Wszystkie kulki startują z tej samej wysokości  $h$ , a więc umieszczając kulki na szczytach poszczególnych zjeżdżalni, nadaje się im takie same energie potencjalne  $E_p$ :

$$E_p = mgh \quad (1)$$

gdzie:

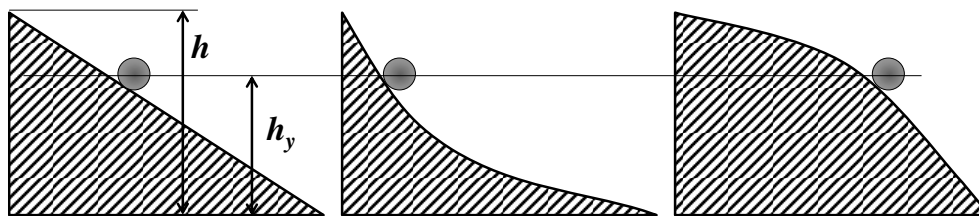
- $m$  – masa kulki,
- $g$  – przyspieszenie grawitacyjne,
- $h$  – wysokość środka ciężkości kulki.

Podczas ruchu w dół energie potencjalne kulek maleją  $E_p$  (zmniejsza się wysokość  $h$  – rys. 2), a rosną ich energie kinetyczne  $E_k$ , tj. związane z ich prędkością  $v$ . A zatem dochodzi do zamiany energii potencjalnej  $E_p$  w kinetyczną  $E_k$ :

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2)$$

gdzie:

- $v$  – prędkość kulki.



Rys. 2. Schemat ruchu kulek po torach

Zgodnie z zasadą zachowania energii energie kinetyczne  $E_k$  poszczególnych kulek muszą być sobie równe na końcu toru zjeżdżalni, zaś ich energie potencjalne  $E_p$  są równe zero (wysokość  $h = 0$ ). Ponieważ masy  $m$  kulek są jednakowe, więc ich prędkości  $v$  u podłoża równi są takie same. Sformułowanie zasady zachowania energii mechanicznej mówią nam, że w dowolnym ruchu przebiegającym bez tarcia (i innych strat energii) energia mechaniczna układu izolowanego jest stała:  $E_m = \text{const}$ . Ze stałości energii mechanicznej wyniknie nam, że:

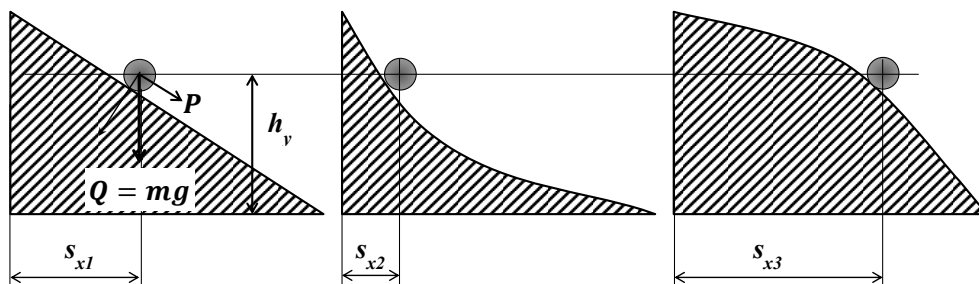
$$E_p + E_k = \text{const}$$

Oznacza to, że w położeniu przedstawianym na rysunku 2:

$$E_p = mgh_y \quad \text{oraz} \quad E_k = \frac{1}{2}mv_y^2$$

Ruch kulek spowodowany jest składową  $P$  siły ciężkości  $Q = mg$  równoległą do toru. Prędkości  $v_y$  wszystkich trzech kul są takie same, natomiast drogi  $s_{xi}$  przez nie przebyte już nie (rys. 3).

Na równi pochyłej siła  $P$  siły ma stałą wartość, a więc zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona kulka uzyskuje stałe przyspieszenie  $a$ , a jej prędkość  $v$  jednostajnie wzrasta.



Rys. 3. Wartości dróg (w poziomie) pokonywanych przez kulkę

Ze względu na zmienny kształt toru na zjeżdżalniach o linii wklęsłej i wypukłej napędzająca siła  $P$  zmienia swoją wartość.

Na początku ruchu na zjeżdżalni:

- o linii wklęsłej, przyspieszenie  $a$  kulki szybko się zwiększa, aby w następnej fazie – podczas jazdy ‘na płaskiej części’ – stopniowo się zmniejszać,
- o linii wypukłej, przyspieszenie  $a$  kulki zwiększa się bardzo wolno, aby w następnej fazie – podczas jazdy ‘na stromej części’ – szybko się zwiększać.

Jak już wykazano - prędkości  $v$  wszystkich trzech kul na tej samej wysokości  $h_y$  są takie same, natomiast drogi  $s_{xi}$  przez nie przebyte są różne. A to oznacza, że czas  $t_{yi}$  pokonywania poszczególnych odcinków zjeżdżalni  $s_{xi}$  jest też różny:

$$t_{yi} = \frac{s_{xi}}{v} \quad (3)$$

Pojawia się zatem pytanie o tor, po którym powinna poruszać się kulka pod wpływem działania siły ciężkości, aby jak najszybciej połączyć dwa punkty w przestrzeni, czyli problem sformułowany przez Jana Bernoulliego.

Rozwiązaniem okazała się krzywa najszybszego spadku zwana cykloidą, a właściwie odwrócony do góry nogami fragment cykloidy. Cykloida zwyczajna jest krzywą, którą kreśli punkt koła toczącego się po innym kole. Krzywa ta od dawna intrygowała matematyków ze względu na wiele ciekawych własności matematycznych. Galileusz, od którego pochodzi nazwa cykloida, wskazywał, że jest ona łukiem o największej wytrzymałości na obciążenie.

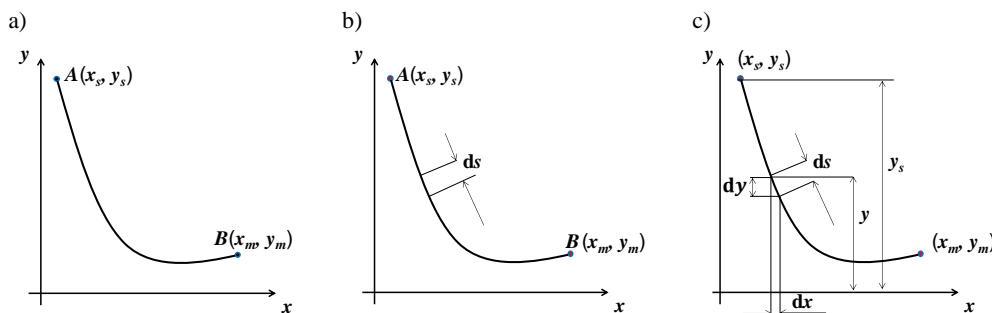
Odwrócony do góry nogami fragment cykloidy, czyli krzywa najszybszego spadku została nazwana przez Jakuba Bernoulliego brachistochroną (rys. 4). Nazwa ta pochodzi od greckich słów: *brachistos* – najkrótszy, *chronos* – czas. Właściwości brachistochrony często są wykorzystywane w praktyce, np. do planowania toru lotu promów kosmicznych, aby osiągnęły wymaganą wysokość w najkrótszym czasie, zużywając przy tym jak najmniejszą ilość paliwa.

Zaprezentowany problem tzn. ‘znalezienia równania krzywej, po której porusza się punkt materialny pod wpływem siły ciężkości, a która ma własność zminimalizowania czasu podróży pomiędzy dwoma, dowolnie zadanymi, punktami’ dobrze

ilustruje podstawowe zagadnienie rachunku wariacyjnego, jakim jest znalezienie ekstremum (praktycznie zawsze to będzie minimum) funkcjonału. Funkcjonały są to pewne uogólnienia funkcji, które jako argument mają zwykle funkcje. Zadaniem jest znalezienie takich funkcji, dla których funkcjonał jest ekstremalny, tzn. jest minimalny bądź maksymalny. Rachunek wariacyjny jest bardzo przydatnym narzędziem mogącym posłużyć do rozwiązywania wielu problemów praktycznych, nie tylko z zakresu mechaniki.

W problemie brachistochrony (rys. 4a):

- zmienna niezależna  $x$  jest to odległość ‘w poziomie’ pomiędzy położeniami punktów  $A$  i  $B$ ,
- zmienna zależna  $y = y(x)$  jest to odległość ‘w pionie’ pomiędzy położeniami punktów  $A$  i  $B$ .



Rys. 4. Krzywa najszybszego spadku: a) więzy na ruch; b) przyrost drogi; c) przyrosty przemieszczeń dla obu współrzędnych

Punktami pomiędzy którymi przebiega droga całkowania są punkty ‘startu’  $A$  o współrzędnych  $(x_s, y_s)$  oraz ‘mety’  $B$  o współrzędnych  $(x_m, y_m)$  będące równocześnie więzami narzuconymi na ruch:  $y_s = y(x_s)$ ,  $y_m = y(x_m)$ .

Zadaniem do rozwiązania jest znalezienie równania krzywej  $y = y(x)$ , które musi spełniać narzucone więzy i minimalizuje całkowity czas  $T$  podróży przedstawiony w postaci całki:

$$T = \int_0^T dt = \int_{x_s, y_s}^{x_m, y_m} dt \quad (4)$$

Na nieskończenie krótkiej drodze  $ds$  (rys. 4b), prędkość  $v$  jest w przybliżeniu stała, więc:

$$dt = \frac{ds}{v} \Rightarrow T = \int_{x_s, y_s}^{x_m, y_m} \frac{ds}{v} \quad (5)$$

Wartość prędkości  $v$  można wyznaczyć z prawa zachowania energii w polu grawitacyjnym:

$$\frac{1}{2}mv^2 = -mgh \quad (6)$$

skąd po przekształceniu:

$$v = v(y) = \sqrt{2g(y_s - y)} \quad (7)$$

Z kolei (rys. 4c):

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (8)$$

Po podstawieniu (7) oraz (8) do (5) uzyskuje się ostatecznie:

$$T = \int_{x_s, y_s}^{x_m, y_m} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2g(y_s - y)}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_s, y_s}^{x_m, y_m} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y}} \quad (9)$$

Określenie krzywej najszybszego spadku, to wybranie, spośród nieskończenie wielu możliwych trajektorii łączących punkt  $A$  o współrzędnych  $(x_s, y_s)$  z punktem  $B$  o współrzędnych  $(x_m, y_m)$  tej, która minimalizuje uzyskane wyrażenie (9).

Przedstawiony problem ilustruje najprostszy przypadek rachunku wariacyjnego, kiedy mamy do czynienia:

- z jedną funkcją  $F$ :

$$F(y, y') = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y}} \quad (10)$$

- jedną zmienną zależną  $y = y(x)$ ,
- będącą funkcją (tylko !) jednej zmiennej niezależnej  $x$ .

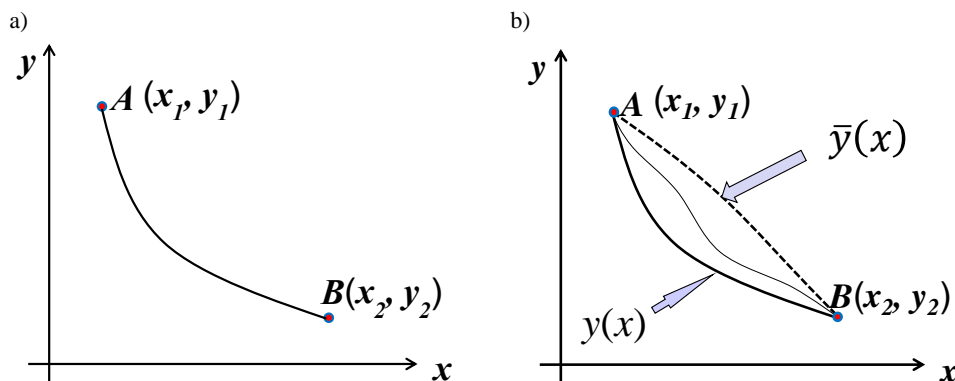
W danym przypadku funkcja (10) zależy od obu zmiennych, tj. zależnej  $y$  oraz niezależnej  $x$ , a także od pochodnej  $dy/dx$ . Ogólne sformułowanie problemu wariacyjnego sprowadza się do znalezienia  $y=y(x)$  dla której funkcjonal  $J$ , określony jako:

$$J = \int_{x_2}^{x_1} F\left(y(x), \frac{dy}{dx}, x\right) dx \quad (11)$$

przyjmuje wartość ekstremalną.

Euler sprowadził problem wariacyjny do równań różniczkowych.

Niech dana jest funkcja  $F(y(x), y'(x), x)$  i dwa punkty  $A(x_1, y_1)$  i  $B(x_2, y_2)$  (rys. 5a) takie, że  $y_1=y(x_1)$  i  $y_2=y(x_2)$ .



Rys. 5. Schemat problemu wariacyjnego: a) więzy na ruch; b) krzywe różniczkowalne

Wówczas całka przedstawiona równaniem (11) ma minimum lub maksimum dla pewnej różniczkowalnej krzywej  $y(x)$  o początku w punkcie  $A$  i końcu w punkcie  $B$ , jeśli dla każdej innej, bliskiej, różniczkowalnej krzywej  $\bar{y}(x)$  (rys. 5b) o tych samych końcach osiąga odpowiednio wartość większą lub mniejszą.

Równania wprowadzone przez Eulera i Lagrange'a są podstawową formułą rachunku wariacyjnego. Mówią one o tym, że jeśli funkcjonal ma postać:

$$S = \int_{t_2}^{t_1} L(x(t), x'(t), t) dt \quad (12)$$

to rozwiązaniem równania Eulera-Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial x'} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

są funkcje  $x(t)$  dla których  $S$  jest stacjonarne, tzn., że dla niewielkich odchyłeń  $x(t)$ ,  $S$  zmienia się nieznacznie. Jest to warunek konieczny, aby  $S$  przyjmowało dla  $x(t)$  ekstremum.

W mechanice klasycznej równania (12) i (13) opisują ruch  $q_k(t)$  układu ciał i przyjmują postać odpowiednio:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (14)$$

oraz:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (15)$$

gdzie  $L(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t)$  jest funkcją Lagrange'a (lagranżjanem) opisującą rozważany układ, zaś  $q_k$  są współrzędnymi uogólnionymi.

Współrzędne uogólnione  $q_k$  są współrzędnymi niezależnymi od siebie, opisujące jednoznacznie położenie układu w przestrzeni (minimalna liczba współrzędnych potrzebnych do opisu położenia układu). W przeciwieństwie do Eulera i d'Alemberta, którzy rozważali z osobna ruch każdego ciała tworzącego badany układ, Lagrange opisał zachowanie układu ciał za pomocą pewnej liczby zmiennych, w ilości równej liczbie stopni swobody danego układu ciał. Prowadzi to w prostej drodze do teorii układów dynamicznych, a bezpośrednim wnioskiem z teorii Lagrange'a jest zasada najmniejszego działania. Irlandzki matematyk Hamilton sformułował zasadę najmniejszego (stacjonarnego) działania, która mówi, że: 'spośród wielu możliwych ruchów układu mechanicznego fizycznie realizowany jest ten, w którym działanie  $S$  przyjmuje najmniejszą wartość'.

Wyznaczenie funkcji  $L$ , która minimalizuje funkcjonal  $S$  z równania (14) jest zadaniem rachunku wariacyjnego. Zasada najmniejszego działania Hamiltona jest najbardziej ogólnym sformulowaniem praw ruchu systemów mechanicznych.

Po dokonaniu odpowiednich przekształceń matematycznych, opisanych m.in. w [2], z zasady najmniejszego działania uzyskuje się model dynamiczny mechanicznego systemu konserwatywnego (w którym nie zachodzi rozpraszanie energii) w postaci równań Eulera-Lagrange'a.

Lagrange zauważył, że energia kinetyczna  $E_k$  i energia potencjalna  $E_p$  układu dają się opisać za pomocą tych zmiennych i odpowiedniego równania różniczkowego. Dla konserwatywnych systemów mechanicznych, w których ruch odbywa się w polu potencjalnym i wszystkie siły są siłami potencjalnymi, funkcja Lagrange'a wyrażona za pomocą współrzędnych uogólnionych przyjmuje postać:

$$L(q, \dot{q}, t) = E_k(q, \dot{q}, t) - E_p(q, t) \quad (16)$$

gdzie:

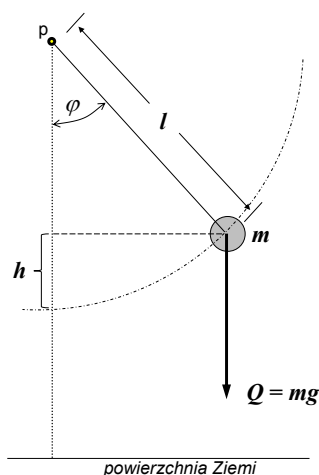
$E_k$  – energia kinetyczna systemu mechanicznego,

$E_p$  – energia potencjalna systemu mechanicznego.

Wówczas rozwiązanie przyjmuje postać opisaną równaniem (15).

### 3. Model przyczynowy ruchu wahadła matematycznego

Rozpatruje się ruch wahadła matematycznego (rys. 6) o masie  $m$  zamocowanego na nieważkim pręcie o długości  $l$ . Zadaniem jest wyznaczenie równania Eulera-Lagrange'a czyli równania opisującego ten ruch.



Rys. 6. Schemat wahadła matematycznego – metoda wariacyjna

W celu określenia wartości funkcji Lagrange'a  $L$ :

$$L(\varphi, \dot{\varphi}, t) = E_k - E_p \quad (17)$$

gdzie współrzędna uogólniona (16)  $q = \varphi$ , wyznacza się energię kinetyczną  $E_k$  oraz energię potencjalną  $E_p$  wahadła matematycznego.

Energię kinetyczną  $E_k$  można wyznaczyć z zależności:

$$E_k = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (18)$$

Z rysunku 6 wynika, że:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = l = const \quad (19)$$

oraz:

$$\sin \varphi = \frac{x}{l} \Rightarrow x = l \sin \varphi \quad (20)$$

$$\cos \varphi = \frac{y}{l} \Rightarrow y = l \cos \varphi \quad (21)$$

Pochodne od przemieszczeń  $x$  oraz  $y$  wynoszą odpowiednio:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = l \dot{\varphi} \cos \varphi \quad (22)$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -l\dot{\varphi} \sin \varphi \quad (23)$$

Podstawiając  $\dot{x}$  (22) oraz  $\dot{y}$  (23) do zależności (15) uzyskuje się:

$$E_k = \frac{1}{2} m(l^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 \quad (24)$$

Natomiast energię potencjalną  $E_p$  można wyznaczyć z zależności:

$$E_p = -mgh \quad (25)$$

Z rysunku 6 wynika, że:

$$\cos \varphi = \frac{l-h}{l} \Rightarrow h = l(1 - \cos \varphi) \quad (26)$$

Podstawiając  $h$  (26) do zależności (25) uzyskuje się:

$$E_p = -mgl(1 - \cos \varphi) \quad (27)$$

Z kolei podstawiając uzyskane zależności na energię kinetyczną  $E_k$  (24) oraz na energię kinetyczną  $E_p$  (27), lagranżjan (17) przyjmie postać:

$$L(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi) \quad (28)$$

Następnie oblicza się kolejno pochodne od  $L$  (28) w zależności na działanie  $S$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl(1 - \cos \varphi) \right] = mgl \sin \varphi \quad (29)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left[ \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl(1 - \cos \varphi) \right] = m l \dot{\varphi} \quad (30)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} (m l \dot{\varphi}) = m l^2 \ddot{\varphi} \quad (31)$$

Jak już wzmiankowano, spełnienie równania Eulera–Lagrange’a (15) jest warunkiem koniecznym na to, aby funkcjonal  $S$  (14) miał ekstremum. Podstawiając uzyskane zależności pochodne od  $L$  (29) i (31) do zależności warunkującej spełnienie równania Eulera–Lagrange’a (15), uzyskuje się:

$$m l^2 \ddot{\varphi} - mgl \sin \varphi = 0 \quad (32)$$

Następnie dzieląc obie strony równania (32) przez  $m \cdot l^2$  uzyskuje się zależność:

$$\ddot{\varphi} - \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (33)$$

Otrzymane równanie jest nieliniowym równaniem różniczkowym, którego ścisłe rozwiązanie jest dość złożone. W przypadku przyjęcia założenia małego wychylenia wahała  $\varphi \rightarrow 0$ , wówczas:

$$\sin \varphi \xrightarrow{\varphi \rightarrow 0} \varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0 \quad (34)$$

uzyskuje się liniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \cdot \varphi = 0 \quad (35)$$

Jest to znane równanie oscylatora harmonicznego bez tłumienia, w którym  $\omega$  jest częstością kołową (wzór na prędkość kątową jest identyczny ze wzorem na częstość kołową ruchu drgającego - istnieje ścisła odpowiedniość między ruchem po okręgu, a ruchem drgającym harmonicznym):

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (36)$$

Uzyskany opis matematyczny zachowania się wahała matematycznego w dowolnej chwili, czyli równania jego ruchu, ma taka sama postać jak w przypadku uzyskania tego opisu za pomocą metody bilansowej, co przedstawiono w [4].

Oznacza to, że zarówno metoda bilansowa jak i zaprezentowana metoda wariacyjna pozwala uzyskać takie same analityczne rozwiązania zadań z zakresu mechaniki.

#### 4. PODSUMOWANIE

Mechanikę klasyczną nazywa się często mechaniką Newtonowską. Od czasu sformowania jej podstaw przez Newtona ulegała ona ciągle doskonaleniu. Rozwinięte przez Eulera i Lagrange'a metody rozwiązywania problemów mechaniki doprowadziły do sformułowania tzw. mechaniki lagranżowskiej. Dzięki ich współpracy powstał rachunek wariacyjny. Mechanika lagranżowska zdobyła sobie popularność wśród naukowców ze względu na jej zdolność analizowania skomplikowanych problemów, ale przede wszystkim ze względu na wyjątkową elegancję, prostotę sformułowania i matematyczną spójność.

#### LITERATURA

1. Maor E. E: the story of a number. Princeton University Press, N.J. 1994,
2. Moisevič I., Gelfand S., Fomin V. Rachunek wariacyjny, Warszawa: PWN, 1979,
3. Struik J. D. A Source Book in Mathematics. Harvard University Press 1969,
4. Tarełko W. Metody formułowania modeli systemów dynamicznych w mechanice. Mechanik (w druku).