

Matematyczny model ślimaka globoidalnego o wklęsłym i wypukłym zarysie zęba

Mathematical model of globoid worm with concave and convex tooth profile

PIOTR POŁOWNIAK
MARIUSZ SOBOLAK *

DOI: <https://doi.org/10.17814/mechanik.2017.1.25>

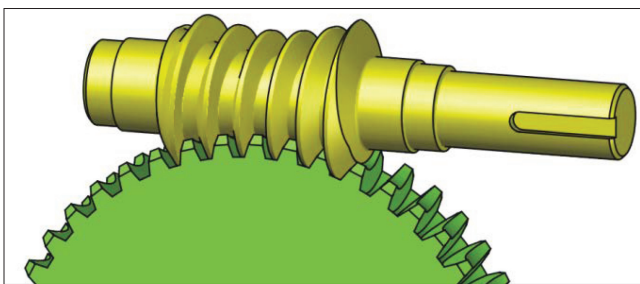
W artykule przedstawiono model matematyczny ślimaka globoidalnego o wklęsłym i wypukłym zarysie zęba. Zapropozowano sposób tworzenia równania parametrycznego zarysu zęba. Wyznaczono parametryczne równanie powierzchni bocznych zwoju ślimaka globoidalnego o zarysie nieprostoliniowym.

SŁOWA KLUCZOWE: przekładnia ślimakowa globoidalna, ślimak globoidalny

This paper presents a mathematical model of globoid worm with concave and convex tooth profile. The method of creating the parametric equation of the profile was shown. The parametric equation of teeth surfaces of globoid worm with no-straight tooth profile was obtained.

KEYWORDS: globoid worm gear, globoid worm

Opisując geometrię ślimaka globoidalnego, wychodzi się od znajomości zarysu zwoju ślimaka [1] – może on być np. prostoliniowy, wklęsły lub wypukły. Model matematyczny oraz model CAD ślimaka globoidalnego o zarysie prostoliniowym przedstawiono w [2, 3]. Wykonanie modelu ślimaka globoidalnego o zarysie nieprostoliniowym jest podstawą do wykonania modelu ślimaczniczy oraz przeprowadzenia wybranych analiz przekładni, np. analizy śladu styku. Na rys. 1 przedstawiono w sposób poglądowy przekładnię ślimakową globoidalną (ślimaka i ślimacznicę).



Rys. 1. Rysunek poglądowy z fragmentem przekładni ślimakowej globoidalnej [4]

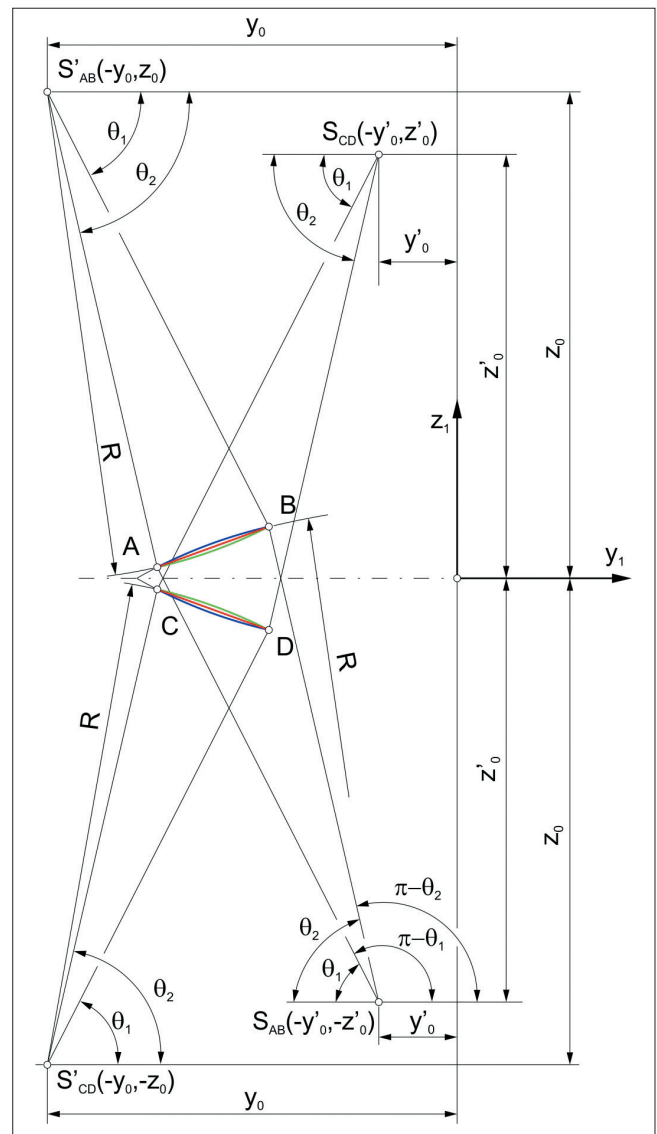
Model matematyczny ślimaka globoidalnego nieprostoliniowego

Zarys wklęsły i wypukły ślimaka globoidalnego jest ograniczony punktami A i B dla jednego boku oraz punktami C i D dla drugiego boku (rys. 2). Współrzędne punktów $A(y_A, z_A)$, $B(y_B, z_B)$, $C(y_C, z_C)$ i $D(y_D, z_D)$ są zależne od przyjętych parametrów przekładni. Sposób ich wyznaczania został omówiony w pracy [2].

Po określeniu współrzędnych punktu zarysu dla jednego i drugiego boku zęba należy wykorzystać równanie parametryczne okręgu o promieniu R :

$$(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \quad (1)$$

gdzie: y, z – współrzędne punktu znajdującego się na okręgu; y_0, z_0 – współrzędne środka okręgu, R – promień okręgu.



Rys. 2. Rysunek pomocniczy do określenia środka łuku danego zarysu oraz zakresu θ dla zarysu wklęsłego i wypukłego ślimaka globoidalnego. Oznaczenia: A, B lub C, D – punkty końcowe zarysu łukowego; y_0, z_0 (y'_0, z'_0) – współrzędne środka łuku S lub S' danego zarysu; R – promień łuku; θ_1, θ_2 – wartości kątowe służące do określenia zakresu θ profilu łukowego

* Mgr inż. Piotr Połowniak (ppolowniak@prz.edu.pl), dr hab. inż. Mariusz Sobolak prof. PRz (msobolak@prz.edu.pl) – Katedra Konstrukcji Maszyn, Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa Politechniki Rzeszowskiej

Do określenia współrzędnych środka zarysu łukowego należy stworzyć układ dwóch równań (1), podstawiając kolejno za y i z współrzędne punktów A i B dla jednego boku oraz C i D dla boku drugiego. Po rozwiązaniu układu równań otrzymuje się dwa rozwiązania środka okręgu S . Od wyboru rozwiązania zależy, jaki będzie charakter profilu – wklęsły lub wypukły.

Kolejnym etapem jest określenie zakresu kąтового profilu. Należy zdefiniować wartości kątowe θ_1 i θ_2 (rys. 2). Można je wyznaczyć np. z zależności:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \arcsin((z_o - z_B)/R) \\ \theta_2 &= \arcsin((z_o - z_A)/R)\end{aligned}\quad (2)$$

Następnie określa się zakres θ dla danego łuku (rys. 2). Parametr kątowy łuku θ zmienia się od wartości początkowej θ_p do wartości końcowej θ_k z krokiem $d\theta$.

W przypadku łuku AB , dla którego otrzyma się zwój o zarysie wklęsłym (kolor zielony), zakres θ wynosi:

$$\begin{aligned}\theta_p &= \theta_2 \\ \theta_k &= \theta_1\end{aligned}\quad (3)$$

W przypadku łuku CD , dla którego otrzyma się zwój o zarysie wklęsłym (kolor zielony), zakres θ wynosi:

$$\begin{aligned}\theta_p &= \theta_1 \\ \theta_k &= \theta_2\end{aligned}\quad (4)$$

W przypadku łuku AB , dla którego otrzyma się zwój o zarysie wypukłym (kolor niebieski), zakres θ wynosi:

$$\begin{aligned}\theta_p &= \pi - \theta_2 \\ \theta_k &= \pi - \theta_1\end{aligned}\quad (5)$$

W przypadku łuku CD , dla którego otrzyma się zwój o zarysie wypukłym (kolor niebieski), zakres θ wynosi:

$$\begin{aligned}\theta_p &= \pi - \theta_1 \\ \theta_k &= \pi - \theta_2\end{aligned}\quad (6)$$

Parametryczny opis łuku w płaszczyźnie y_1z_1 przedstawia równanie (7). W tym równaniu za y_o i z_o należy wstawić odpowiednie współrzędne środka łuku, a za parametr θ – odpowiedni zakres (równanie (3), (4), (5) lub (6)):

$$\bar{r}_{\text{łuk}}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1(\theta) \\ y_1(\theta) \\ z_1(\theta) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R \cdot \cos(\theta) + y_o \\ R \cdot \sin(\theta) + z_o \\ 1 \end{bmatrix}\quad (7)$$

gdzie: R – promień zarysu łukowego; y_o , z_o – współrzędne środka zarysu łukowego, θ – parametr ($\theta = \theta_p; d\theta: \theta_k$).

Po wyznaczeniu parametrycznego równania zarysu zęba należy wykorzystać parametryczny opis globoidalnej linii śrubowej [2]. Przejście dowolnego punktu po globoidalnej linii śrubowej opisuje jednorodna macierz transformacji:

$$M = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1) & \cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_1) & -\sin(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_1) & a \cdot \cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) \\ -\sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_1) & -\cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_1) & -a \cdot \cos(\varphi_1) \\ 0 & \sin(\varphi_2) & \cos(\varphi_2) & a \cdot \sin(\varphi_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad (8)$$

gdzie: φ_1 – kąt obrotu ślimaka (oraz parametr), φ_2 – kąt obrotu ślimacznicy (oraz parametr pomocniczy), a – odległość osi ślimaka i ślimacznicy.

W równaniu (8) należy wykorzystać zależność $\varphi_2 = \varphi_1 \cdot i$, wyznaczoną na podstawie przełożenia przekładni ślimaczkowej:

$$i = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\quad (9)$$

gdzie: z_1 – liczba zębów ślimaka, z_2 – liczba zębów ślimacznicy.

Parametryczne równanie powierzchni bocznej zęba ślimaka globoidalnego o zarysie nieprostoliniowym otrzymuje się przez przeprowadzenie zarysu łukowego zęba po globoidalnej linii śrubowej. Wektor wodzący powierzchni zwoju ślimaka nieprostoliniowego określa równanie:

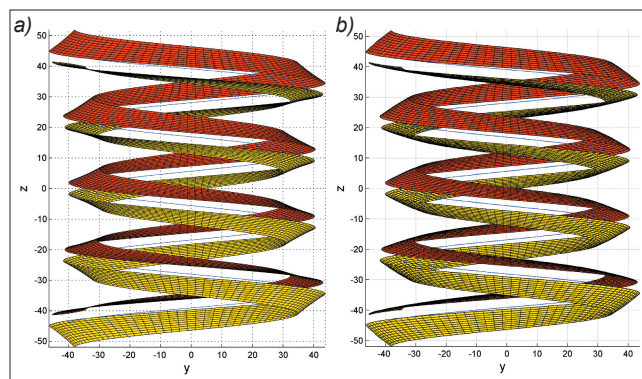
$$\bar{r}_1^{(1)}(\varphi_1, \theta) = M \cdot \bar{r}_{\text{łuk}}^{(1)}\quad (10)$$

Wprowadzając równania (7) i (8) do (10), otrzymuje się:

$$\bar{r}_1^{(1)}(\varphi_1, \theta) = \begin{bmatrix} x_1(\theta) \cdot \cos(\varphi_1) - a \cdot \sin(\varphi_1) + a \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_1) + \\ + y_1(\theta) \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_1) - z_1(\theta) \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_1) \\ -x_1(\theta) \cdot \sin(\varphi_1) - a \cdot \cos(\varphi_1) + a \cdot \cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) + \\ + y_1(\theta) \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_1) - z_1(\theta) \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_1) \\ a \cdot \sin(\varphi_2) + y_1(\theta) \cdot \sin(\varphi_2) + z_1(\theta) \cdot \cos(\varphi_2) \\ 1 \end{bmatrix}\quad (11)$$

W równaniu (11) określa się zakres zwoju ślimaka przez parametr φ_1 . Zmienia się on od wartości początkowej φ_{1p} do wartości końcowej φ_{1k} z krokiem $d\varphi_1$.

Z równania (11) można otrzymać powierzchnię wklęsłą lub wypukłą odpowiedniego boku zęba (rys. 3).



Rys. 3. Boki ślimaka globoidalnego o zarysie: a) wklęsłym, b) wypukłym

Wnioski

Wyznaczone parametryczne równanie powierzchni bocznych zwoju ślimaka globoidalnego o zarysie wklęsłym lub wypukłym może posłużyć do wykonania modelu matematycznego ślimacznicy oraz modeli CAD przekładni, a także do przeprowadzenia analiz przekładni (np. analizy śladu styku czy analizy MES).

LITERATURA

- Marciniak T. „Przekładnie ślimaczkowe walcowe”. Warszawa: PWN, 2001.
- Połowniak P., Sobolak M. „Matematyczny model ślimaka globoidalnego na potrzeby generowania modelu CAD”. *Mechanik*. 2 (2015): płyta CD.
- Połowniak P., Sobolak M. „Modelowanie ślimaka globoidalnego w środowisku CAD”. *Mechanik*. 1 (2015): s. 71–74.
- Sobolak M., Jagiełowicz P.E., Połowniak P. „Generowanie globoidalnej linii śrubowej w środowisku CATIA z użyciem reguł”. *Mechanik*. 7 (2016): s. 632–633.