Wyznaczanie dystrybuant długości pęknięcia zmęczeniowego metodą Monte Carlo

Determination of distributions of fatigue crack length by Monte Carlo method

JÓZEF DREWNIAK
LESZEK HOJDYS*

DOI: https://doi.org/10.17814/mechanik.2017.7.75

Opisano wyznaczanie losowych dystrybuant długości pęknięcia zmęczeniowego za pomocą metody Monte Carlo oraz modelu Bogdanowa–Kozina. Dane wejściowe potrzebne do wyznaczenia dystrybuant zostały uzyskane z wykorzystaniem symulacji wzrostu pęknięcia zmęczeniowego z użyciem modelu Parisa–Erdogana.
SŁOWA KLUCZOWE: zmęczenie materiałów, modele probabilistyczne, model Bogdanowa–Kozina, model Parisa–Erdogana, metoda Monte Carlo

Described is the determination of random distributions of the fatigue crack length by the Monte Carlo method and the Bogdanov–Kozin model. Input data needed to determine the distributor were obtained by simulation of fatigue crack growth using the Paris–Erdogan model.
KEYWORDS: fatigue, probabilistic models, Bogdanov–Kozin model, Paris–Erdogan model, Monte Carlo method

Dnia 3 czerwca 1998 r. w niemieckim Eschede pociąg jadący z prędkością ponad 200 km/h uderzył w wiadukt kolejowy, który następnie zawalił się na jeden z wagonów. Zginęło 101 osób, 105 zostało rannych. Był to najpoważniejszy wypadek pociągu dużych prędkości w historii. Bezpośrednią przyczyną było wykolejenie składu na rozjeździe torów w wyniku uszkodzenia obręczy koła spowodowanego zmęczeniem materiału [12].

Zmęczenie materiałów konstrukcyjnych jest najczęstszą przyczyną uszkodzeń elementów maszyn [1]. Krytyczne uszkodzenia elementów maszyn pojawiają się zazwyczaj nagle i niespodziewanie. Podstawową przyczyną tego jest skomplikowana natura procesów zmęczeniowych oraz to, że w początkowej fazie procesy zmęczeniowe zachodzące w elementach maszyn są trudne do zauważenia.

Procesy zmęczeniowe są wynikiem splotu wielu skomplikowanych zjawisk, charakteryzujących się dużym losowym rozrzutem, które trudno opisać w sposób deterministyczny. Dlatego do opisu procesów zmęczeniowych coraz częściej stosuje się modele probabilistyczne. Trwałość zmęczeniową wyznacza się zazwyczaj na podstawie drogich i czasochłonnych badań. Są one przeprowadzane na gotowych elementach, czyli już po procesie projektowania. Ze względu na te niedogodności wskazane jest poszukiwanie takich metod, które mogłyby pomóc określić trwałość zmęczeniową elementu na etapie projektowania. W wielu przypadkach fizyczne próby zmęczeniowe można zastąpić odpowiednio skonstruowanym modelem matematycznym. Modele takie charakteryzują się jednak dużą złożonością obliczeniową, dlatego do obliczeń wskazane jest zastosowanie komputerów. Opracowywanie numerycznych metod wyznaczania trwałości zmęczeniowej wydaje się być perspektywicznym kierunkiem badań naukowych.

Proces zmęczeniowy można zwykle podzielić na trzy etapy. Na pierwszym etapie pojawiają się lokalne odkształcenia plastyczne, a wraz z nimi przebiega lokalne wzmocnienie i osłabienie elementu. Na drugim etapie powstają mikropęknięcia, których liczba rośnie wraz z liczbą cykli obciążeń. Na trzecim, ostatnim etapie następuje rozwój i łączenie się mikropęknięć, skutkiem czego powstają makropęknięcia prowadzące do całkowitego zniszczenia elementu. Pęknięcia występują głównie na powierzchni lub w warstwie wierzchniej, ale wszelkiego rodzaju wady pochodzące z procesów wytwarzania mogą powodować powstawanie ognisk pęknięć zarówno na powierzchni, jak i w warstwach podpowierzchniowych. Efektem działania procesów zmęczeniowych jest całkowite pęknięcie, zwane także przełomem zmęczeniowym. Przełom zmęczeniowy jest skutkiem rozwoju ognisk powierzchniowych i przypowierzchniowych prostopadle do kierunku wydłużeń.

Rozrost szczeliny zmęczeniowej może być opisany za pomocą ogólnego równania pęknięć (szczelin) zmęczeniowych:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}N} = F(a, S, C, \theta, \zeta) \tag{1}$$

gdzie: a – bieżąca długość pęknięcia zmęczeniowego, N – liczba cykli obciążenia (lub czas) odpowiadająca danej długości pęknięcia, S – naprężenia w materiale, będące wynikiem działania obciążeń zmiennych, C – ogólnie właściwości materiałowe, θ – temperatura, ζ – pozostałe czynniki mające wpływ na rozrost szczeliny zmęczeniowej.

* Dr hab. inż. Józef Drewniak (jdrewniak@ath.bielsko.pl), mgr inż. Leszek Hojdys (lhojdys@op.pl) – Akademia Techniczno-Humanistyczna

Najczęściej wzory opisujące wzrost pęknięcia zmęczeniowego są otrzymywane na drodze doświadczalnej. Do najbardziej znanych i najpopularniejszych należy wzór Parisa–Erdogana:

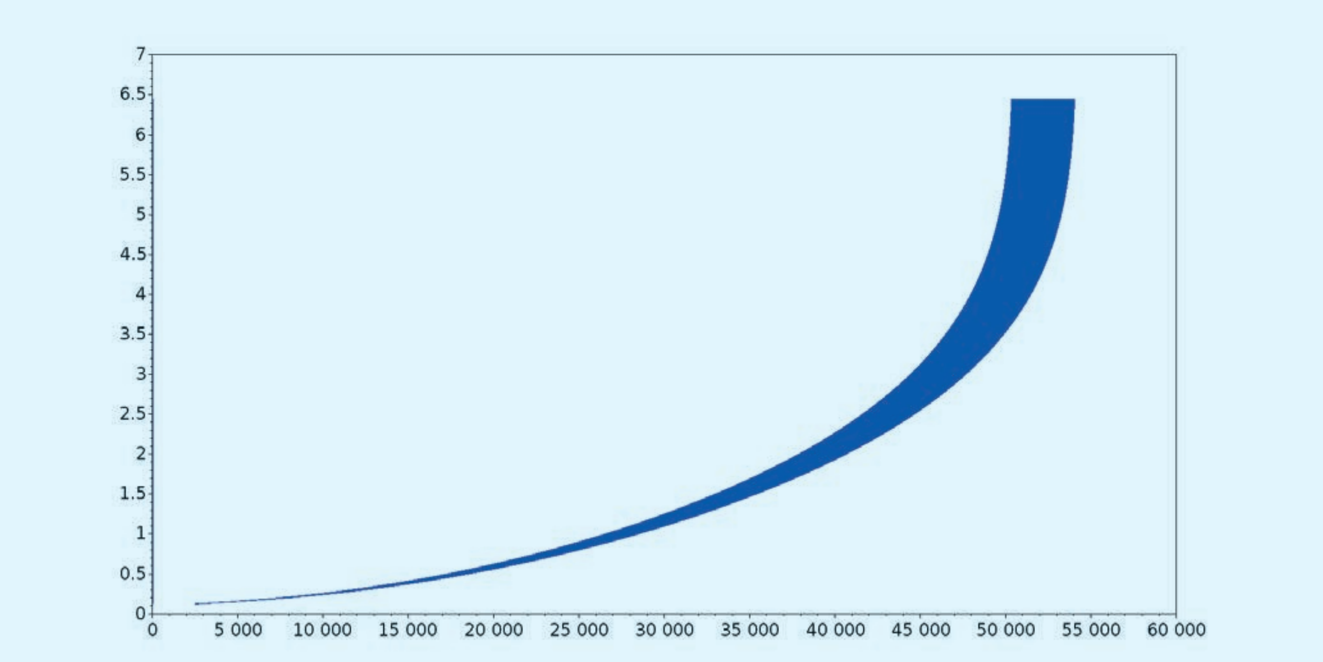
$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}N} = C(\Delta K)^m \tag{2}$$

gdzie: C, m – stałe materiałowe, ΔK – zakres współczynnika intensywności naprężeń.

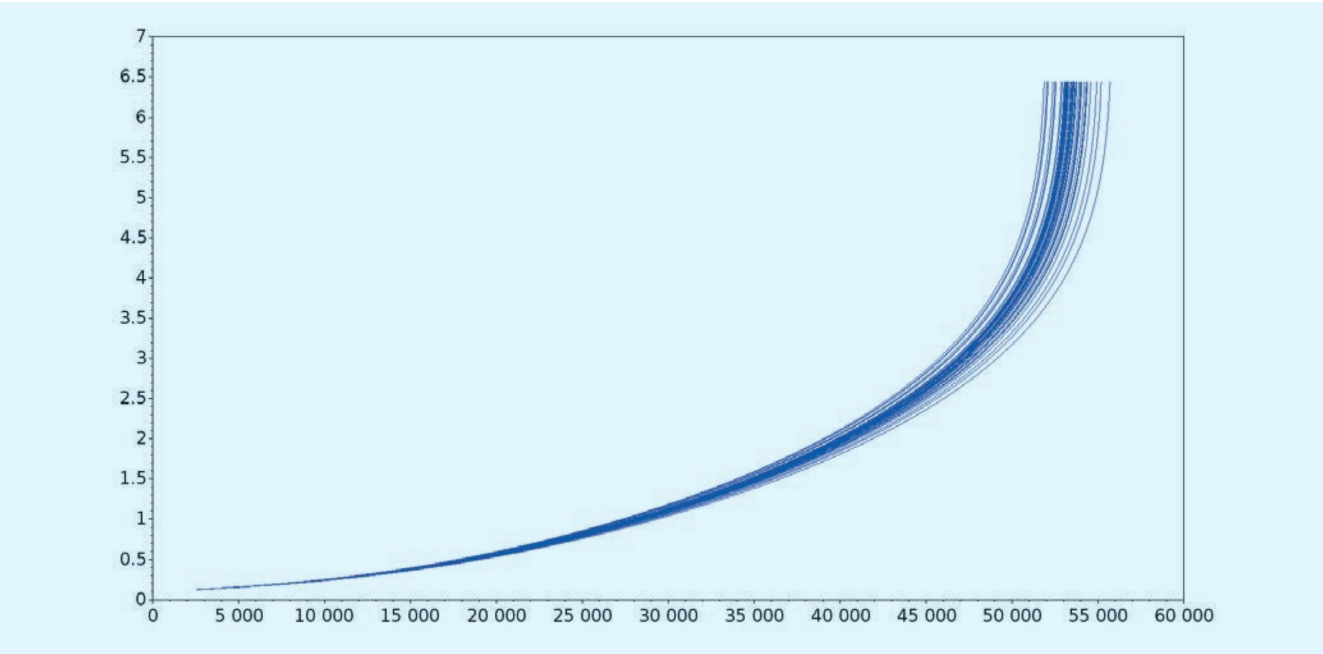
Podstawowym problemem występującym w tym równaniu jest wyznaczenie parametrów materiałowych C, m. Zależą one od wielu czynników, takich jak: właściwości fizyczne i geometryczne materiału, temperatura, częstość i zakres naprężeń. Muszą być więc wyznaczane osobno dla każdego rozpatrywanego przypadku. Natomiast zakres współczynnika intensywności naprężeń ΔK wyznaczany jest zazwyczaj metodami numerycznymi, głównie metodą elementów skończonych [2].

Wyznaczanie losowych dystrybuant długości pęknięcia zmęczeniowego metodą Monte Carlo

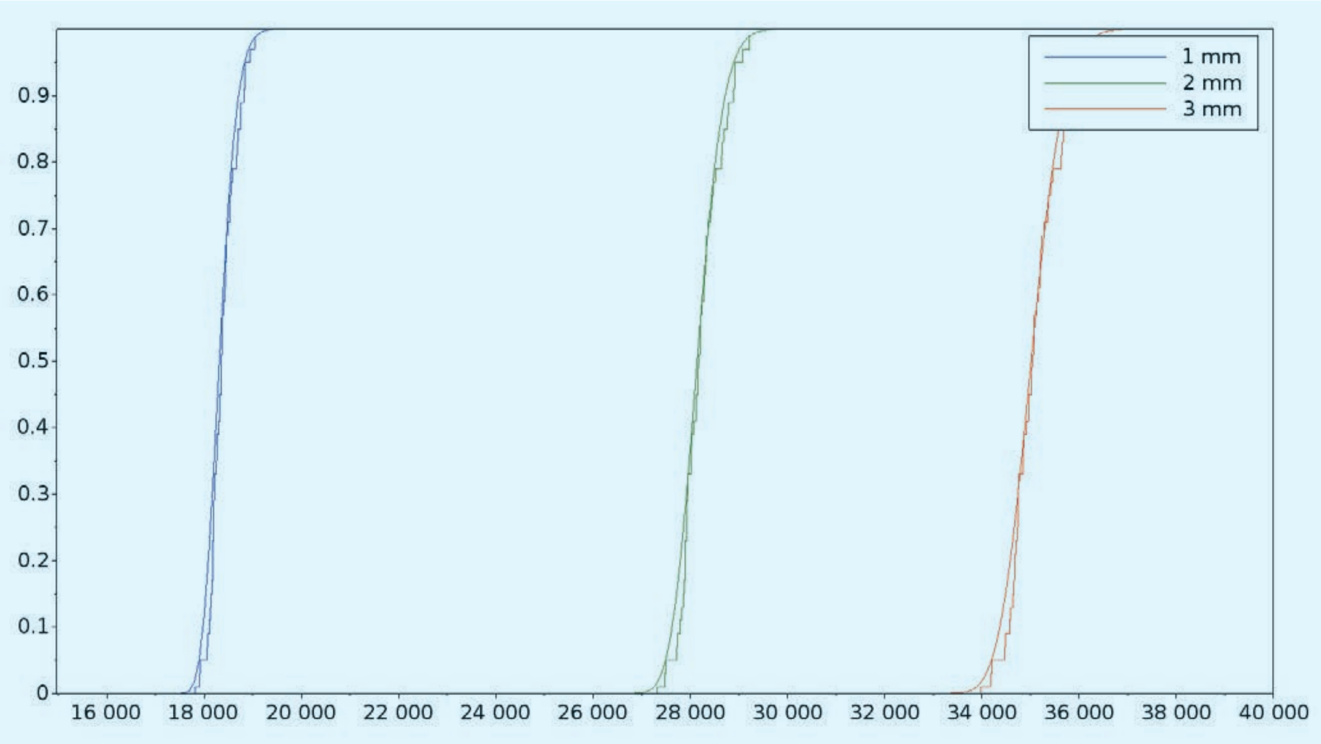
Dane wejściowe uzyskano na podstawie symulacji wzrostu długości pęknięcia zmęczeniowego za pomocą modelu Parisa–Erdogana. Wynikiem symulacji była wiązka krzywych przedstawiających przyrost długości pęknięcia zmęczeniowego w zależności od liczby cykli obciążenia. Kolejne krzywe wchodzące w skład wiązki zostały wygenerowane poprzez krokowe zmienianie wartości parametru *C* z równania Parisa–Erdogana.



Rys. 1. Wykres wiązki przebiegów wzrostu długości pęknięcia zmęczeniowego uzyskany za pomocą modelu Parisa–Erdogana



Rys. 2. Wykres wiązki przebiegów wzrostu długości pęknięcia zmęczeniowego uzyskany z modelu Parisa–Erdogana metodą Monte Carlo



Rys. 3. Wykres dystrybuant długości pęknięcia zmęczeniowego uzyskanych za pomocą metody Monte Carlo oraz modelu Bogdanowa–Kozina

Wygenerowana wiązka zawierała 1000 krzywych. Na wykresie (rys. 1) przedstawiono wszystkie wygenerowane krzywe dla jednego zestawu danych. Po przeprowadzeniu statystycznej analizy danych okazało się, że wyznaczone na podstawie otrzymanych z modelu Parisa–Erdogana krzywych zmienne losowe związane z poszczególnymi długościami pęknięć mają rozkład wykładniczy, a według literatury powinny mieć rozkład logarytmiczno-normalny [9]. Dlatego w celu uzyskania poprawnego rozkładu zmiennych losowych stworzono algorytm bazujący na metodzie Monte Carlo, wybierający w odpowiedni sposób krzywe z wiązki wejściowej, aby rozkłady zmiennych losowych przypisanych do danych długości pęknięć miały rozkłady logarytmiczno-normalne. Algorytm ten uwzględnia także to, że rozkłady te w przypadku wiązki wejściowej mają charakter wykładniczy. Na rys. 2 przedstawiono wynik działania opracowanego algorytmu. Aby zachować czytelność wykresu, wybrano tylko 50 krzywych. Natomiast sam algorytm podczas normalnej pracy z 1000 krzywych wejściowych wybiera 200. Liczba wybieranych krzywych została wyznaczona poprzez analizę histogramów otrzymywanych w procesie symulacji Monte Carlo.

Na podstawie wejściowych krzywych wygenerowano także dystrybuanty długości pęknięcia zmęczeniowego za pomocą modelu Bogdanowa–Kozina. Model ten został dokładniej opisany w pracach [4–8, 10]. Uzyskane dystrybuanty dla trzech długości pęknięć: 1 mm, 2 mm i 3 mm przedstawiono na rys. 3. Dystrybuanty pochodzące z modelu Bogdanowa–Kozina zostały zaprezentowane za pomocą gładkich krzywych, a te pochodzące z metody Monte Carlo – za pomocą krzywych schodkowych.

Podsumowanie

Dystrybuanty długości pęknięcia zmęczeniowego otrzymane za pomocą modelu Bogdanowa–Kozina oraz metody Monte Carlo charakteryzują się dużą zgodnością. Podstawową wadą metody Monte Carlo jest duże zapotrzebowanie na moc obliczeniową komputera. Model Bogdanowa–Kozina charakteryzuje się mniejszym zapotrzebowaniem na moc obliczeniową komputera, a otrzymane dystrybuanty równie dobrze opisują rozkłady zmiennych losowych na poszczególnych długościach pęknięć. Oprócz metody Monte Carlo oraz modelu Bogdanowa–Kozina do wygenerowania dystrybuant użyto rozkładu Weibulla (aby zachować czytelność wykresu, nie został on pokazany na rys. 3). Przedstawiony algorytm został włączony do oprogramowania opisanego w pracy [8, 11]. Oprogramowanie to będzie dalej rozwijane.

LITERATURA

1. Kocańda S., Szala J. *„Podstawy obliczeń zmęczeniowych”*. Warszawa: PWN, 1985.
2. Sobczyk K., Spencer B.F. *„Stochastyczne modele zmęczenia materiałów”*. Warszawa: WNT, 1992.
3. Benjamin J.R., Cornell C.A. *„Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów”*. Warszawa: WNT, 1977.
4. Bogdanoff J.L., Kozin F. “*Probabilistic models of Cumulative Damage”*. New York: John Wiley & Sons, 1985.
5. Bogdanoff J.L., Kozin F. “Probabilistic models of fatigue crack growth II”. *Engineering Fracture Mechanics*. 20 (1984).
6. Bogdanoff J.L., Kozin F. “Probabilistic models of fatigue crack growth: results and speculations”. *Nuclear Engineering and Design*. 115 (1989).
7. Drewniak J. *„Probabilistyczny model obliczeniowy trwałości zmęczeniowej elementów i zespołów maszyn”*. Bielsko-Biała: Wydawnictwo Filii PŁ, 1992.
8. Drewniak J., Hojdys L. „Komputerowe wspomaganie analizy trwałości zmęczeniowej walcowych kół zębatych”. *Mechanik*. 7, 2015.
9. Virkler D.A. i in. “*The statistical nature of fatigue crack propagation”*. AFFDL-TR-78-43, 1978.
10. Kozin F., Bogdanoff J. “On probabilistic modelling of fatigue fatigue crack growth”. *Engineering Fracture Mechanics*. 18 (1983).
11. Drewniak J., Hojdys L. „Oprogramowanie do numerycznej analizy wzrostu pęknięcia zmęczeniowego za pomocą modeli Markowskich i semi-Markowskich”. *Mechanik*. 7 (2016).
12. Bogdanowicz A. „10. rocznica katastrofy w Eschede”. *Rynek Kolejowy*. 6 (2008).