

# Przykład zastosowania metody dwuetapowej w rozwiązywaniu kratownic obciążonych niesymetrycznie

## Example of application of two-stage method in calculations of trusses loaded in non-symmetric way

JANUSZ RĘBIELAK\*

DOI: <https://doi.org/10.17814/mechanik.2017.7.80>

Przedmiotem pracy jest analiza wyników zastosowania dwuetapowej metody obliczeń układów statycznie niewyznaczalnych w odniesieniu do wybranego typu kratownicy płaskiej obciążonej w sposób niesymetryczny. Na każdym etapie tej metody obliczane są wartości sił w prętach kratownic statycznie wyznaczalnych, których schematy statyczne otrzymano przez odpowiednie zredukowanie liczby prętów kratownicy podstawowej – ta liczba jest równa stopniowi statycznej niewyznaczalności kratownicy podstawowej. Obciążenia zewnętrzne na poszczególnych etapach mają połowę wartości obciążeń kratownicy podstawowej i są przyłożone do odpowiednich węzłów kratownic pośrednich. Parametry geometryczne dotyczące rozpiętości oraz wysokości konstrukcyjnej rozważanych kratownic są takie same jak dla kratownicy podstawowej. Finalne wartości sił obliczone w prętach kratownicy statycznie niewyznaczalnej są wypadkową wielkości sił obliczonych na każdym etapie w odpowiednich prętach kratownic statycznie wyznaczalnych.

**SŁOWA KLUCZOWE:** kratownica, układ statycznie niewyznaczalny, metoda obliczeń

*The paper presents analysis of results obtained by application of two-stage method of calculation of the statically indeterminate systems for selected type of plane trusses loaded in non-symmetrical way. In each stage of this method are calculated values of forces acting in members of the statically determinate trusses, schemes of which are determined by suitable reduction of number of members, which number is equal to statically indeterminacy of the basic truss. In particular stages the outer load forces are of half values of load of the basic truss and they are applied to suitable nodes of the intermediate trusses. Geometric parameters referring to the clear span and construction depth of the considered trusses are in each stage the same like in the basic truss. Final values of forces calculated in the statically indeterminate truss are resultants of forces determined in each stage for appropriate members of statically determinate trusses.*

**KEYWORDS:** truss, statically indeterminate system, method of calculation

Metoda dwuetapowa rozwiązywania kratownic statycznie niewyznaczalnych powstała podczas wstępnej analizy statycznej złożonych przestrzennych struktur prętowo-ciężnowych [1]. Zastosowano w niej prostą zasadę superpozycji, mówiącą o tym, że rezultat działania danej siły może zostać zdefiniowany jako suma rezultatów działania sił składowych [2–5]. Inspiracją dla powstania metody dwuetapowej były obrazy odkształceń płaskich postaci kratownic prętowo-ciężnowych, będących systemami statycznie niewyznaczalnymi, których pasy górny

i dolny były wykonane za pomocą cięgien. Jeśli wstępne ich sprzężenie jest niewystarczające, a siły obciążające są zbyt duże, to cięgna usytuowane np. w pasie górnym nie uczestniczą w procesie przekazywania sił do miejsc podparcia. Liczba nieaktywnych cięgien jest w tym przypadku równa stopniowi statycznej niewyznaczalności kratownicy podstawowej. Ta obserwacja skłoniła do postawienia następującego pytania: czy kratownicę statycznie niewyznaczalną można rozwiązać dwuetapowo, za pomocą jednej z metod stosowanych do obliczania kratownic statycznie wyznaczalnych, rozwiązując na każdym etapie oddzielnie kratownicę statycznie wyznaczalną o odpowiednim schemacie? Odpowiedzią na tak sformułowane pytanie jest właśnie metoda dwuetapowa, wykorzystująca w swej procedurze zasadę superpozycji [6]. Poprawność przyjętych założeń sprawdzono przez wykonanie tą metodą obliczeń kratownic i porównanie wyników z rezultatami uzyskanymi za pomocą odpowiednich programów komputerowych.

### Ogólny schemat procesu obliczeń

We wspomnianych obliczeniach rozpatrywano kratownice płaskie, składające się z kwadratowych modułów oddzielonych od siebie prętami pionowymi. W niniejszej pracy rozważana jest podobna kratownica statycznie niewyznaczalna, posiadająca jednak centralny pas poziomy, usytuowany w połowie jej wysokości konstrukcyjnej (rys. 1a). Jest to kratownica utworzona z 16 węzłów ( $w = 16$ ) oraz 33 prętów ( $p = 33$ ).

Kratownica płaska wewnętrznie statycznie wyznaczalna musi spełniać warunek:

$$p = 2 \cdot w - 3 \quad (1)$$

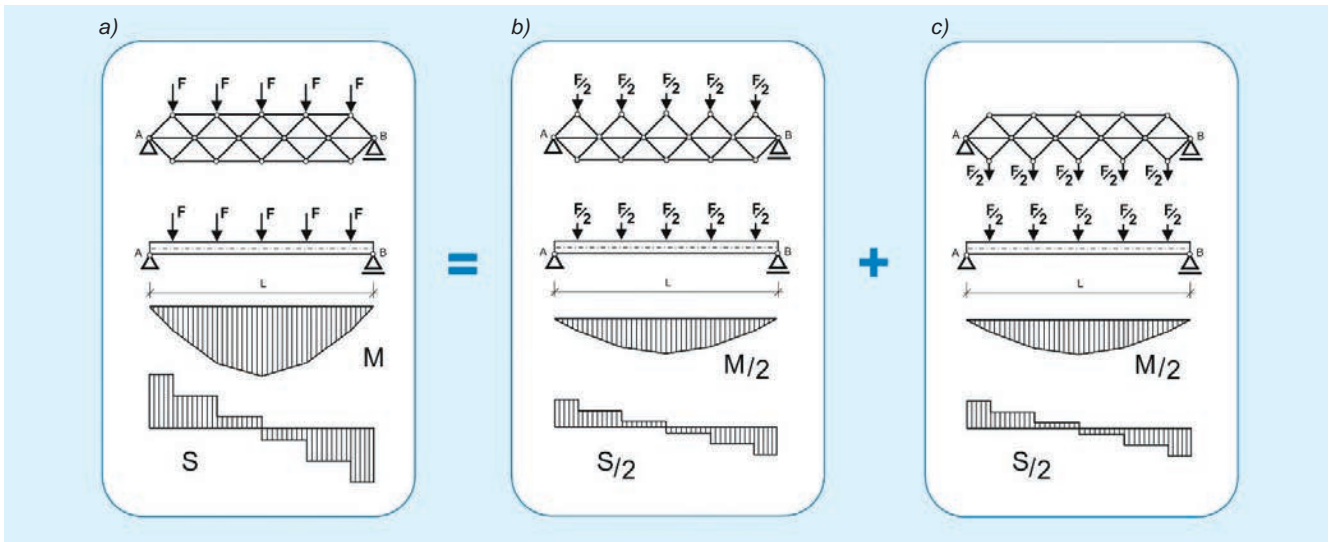
To oznacza, że dla liczby węzłów  $w = 16$  maksymalna liczba prętów tworzących kratownicę wynosi:

$$29 = 2 \cdot 16 - 3 \quad (2)$$

Kratownica o schemacie pokazanym na rys. 1a jest zbudowana z 33 prętów, a zatem jest kratownicą czterokrotnie statycznie niewyznaczalną. Aby uczynić ją systemem statycznie wewnętrznie wyznaczalnym, należy usunąć cztery odpowiednie pręty.

Zdecydowano, że na pierwszym etapie zostaną usunięte cztery pręty poziome pasa górnego, a siły obciążające, o wartości równej połowie wartości sił obciążających kratownicę podstawową, będą przyłożone do tych samych węzłów pasa górnego co w kratownicy podstawowej (rys. 1b). Na etapie drugim zostaną usunięte cztery pręty pasa dolnego, a połówki sił obciążających będą przyłożone do węzłów pasa dolnego, leżących na odpowiednich liniach działania sił w kratownicy podstawowej (rys. 1c). Taka ich lokalizacja jest zgodna z zasadami rachunku wektorowego i charakterem sił jako wektorów liniowych.

\* Prof. dr hab. inż. arch. Janusz Rębielak (j.rebielak@wp.pl) – Politechnika Krakowska, Wydział Architektury, Instytut Projektowania Budowlanego (A-4), Pracownia Konstrukcji Budowlanych (A-44)



Rys. 1. Schemat procedury postępowania w dwuetapowej metodzie rozwiązywania kratownic płaskich statycznie niewyznaczalnych wraz z poglądową analogią do belek zginanych

Ponadto proponowana procedura wynika bezpośrednio z trzech podstawowych warunków równowagi dotyczących dowolnego płaskiego układu sił:

$$\sum P_{ix} = 0 \quad (3)$$

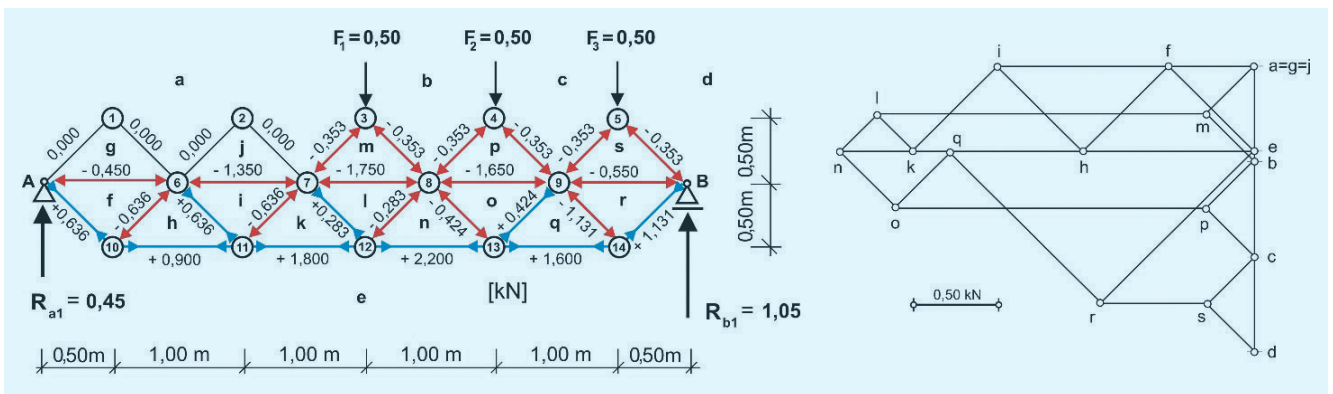
$$\sum P_{iy} = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_i = 0 \quad (5)$$

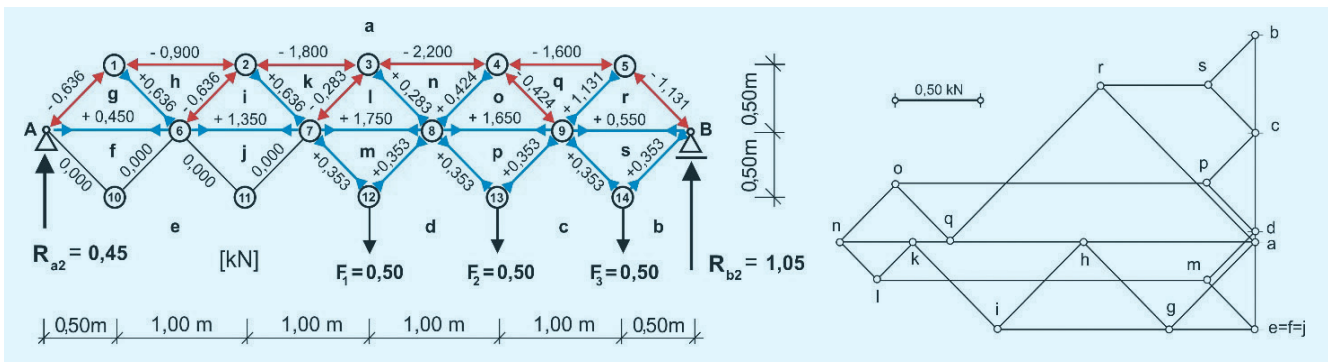
Te trzy konieczne warunki równowagi wystarczająco uzasadniają celowość zastosowania zasady superpozycji w procedurze postępowania w dwuetapowej metodzie rozwiązywania kratownic statycznie niewyznaczalnych.

### Obliczenia kratownicy obciążonej niesymetrycznie

W tej części zaprezentowano wyniki obliczeń wykonywanych metodą dwuetapową, które porównywano z wynikami uzyskanymi dla takiej samej kratownicy, lecz obciążonej niesymetrycznie w ten sam sposób, siłami o identycznych wartościach. Geometryczny układ prętów rozpatrywanej kratownicy jest tożsamy z układem pokazanym na rys. 1a, jednak jest ona obciążona w sposób niesymetryczny jedynie trzema siłami, przyłożonymi do trzech węzłów pasa górnego, usytuowanych po prawej stronie kratownicy w sąsiedztwie podpory B (rys. 2). Rozpiętość badanej kratownicy jest równa 5 m, a jej wysokość konstrukcyjna wynosi 1 m. Kratownica jest obciążona trzema siłami, z których każda ma wartość 1 kN.



Rys. 2. Wartości sił w prętach, uzyskane na pierwszym etapie obliczeń wykonywanych metodą dwuetapową



Rys. 3. Wartości sił w prętach, uzyskane na drugim etapie obliczeń wykonywanych metodą dwuetapową

Postępując zgodnie z procedurą metody dwuetapowej, na pierwszym etapie usunięto pręty pasa górnego i do wskazanych wcześniej węzłów pasa górnego przyłożono siły skupione o wartości równej połowie wartości tzw. sił wyjściowych, tj. o wartości 0,5 kN. Obliczenia przeprowadzono metodą Cremony, a wielkości sił uzyskanych dla każdego z prętów przedstawiono (wraz z kompletnym planem Cremony) na schemacie kratownicy (rys. 2). Na etapie drugim również usunięto cztery pręty, lecz tym razem z pasa dolnego, a siły o wartościach równych 0,5 kN przyłożono do odpowiednich węzłów tego pasa. Tak jak poprzednio proces obliczeń przeprowadzono metodą Cremony, a jego rezultaty w sposób poglądowy pokazano na rys. 3.

Stosując reguły rachunku wektorowego, wyznaczano kolejno siły w prętach badanej kratownicy podstawowej, które są wypadkowymi sił obliczonych na każdym etapie dla prętów usytuowanych między węzłami o tych samych numerach porządkowych. Ponieważ na etapie pierwszym usunięto np. pręt między węzłami pasa górnego, o numerach 3 i 4 (rys. 2), dlatego wartość siły tam działającej jest równa zero. Na drugim etapie ten pręt jest obecny między węzłami 3 i 4 (rys. 3), a wyliczona wartość siły ściskającej w nim działającej jest równa  $-2,2$  kN. Dlatego też wypadkowa wartość siły w tym pręcie rozważanej kratownicy statycznie niewyznaczalnej jest równa  $-2,20$  kN.

Wartości sił działających we wszystkich prętach kratownicy, obliczone metodą dwuetapową, pokazano na rys. 4a. Dla przykładowego krzyżulca umieszczonego między węzłami o numerach 4 oraz 8 wartość siły ściskającej w nim działającej, obliczona na pierwszym etapie, jest równa  $-0,353$  kN (rys. 2), natomiast siła określona w tym samym pręcie na drugim etapie obliczeń jest siłą rozciągającą o wartości 0,424 kN (rys. 3). Wypadkowa wartość siły działającej w tym pręcie obliczona metodą dwuetapową jest zatem równa ok. 0,07 kN (rys. 4a), co oznacza, że występuje w nim niewielka siła rozciągająca.

Należy pamiętać, że w omawianej metodzie nie uwzględnia się sztywności prętów łączących się w węzłach kratownicy. Ze wstępnej analizy uzyskanych wartości sił wynika, że ogólny układ sił – zwłaszcza gdy chodzi o charakter ich działania – jest zgodny z przewidywaniami, również dotyczącymi zróżnicowania wartości sił występujących w obszarze rozważanego układu kratownicowego.

W celu zweryfikowania otrzymanych wartości sił kratownicę o tym samym schemacie statycznym (rys. 4b) obliczono w programie komputerowym Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2016, uwzględniając także wzajemne zróżnicowanie sztywności poszczególnych elementów w łączących je węzłach.

Badana kratownica również miała rozpiętość 5 m i wysokość konstrukcyjną 1 m oraz była obciążona i podparta w identyczny sposób jak kratownica podstawowa. Przyjęto, że kratownica jest zbudowana z rurowych prętów stalowych o module Younga  $E = 210$  GPa, średnicy przekroju kołowego równej  $\varnothing 30$  mm i grubości ścianek wynoszącej 4 mm. Wartości sił otrzymane tą drogą oraz ich rozmieszczenie w przestrzeni obliczanej kratownicy pokazano na rys. 4b.

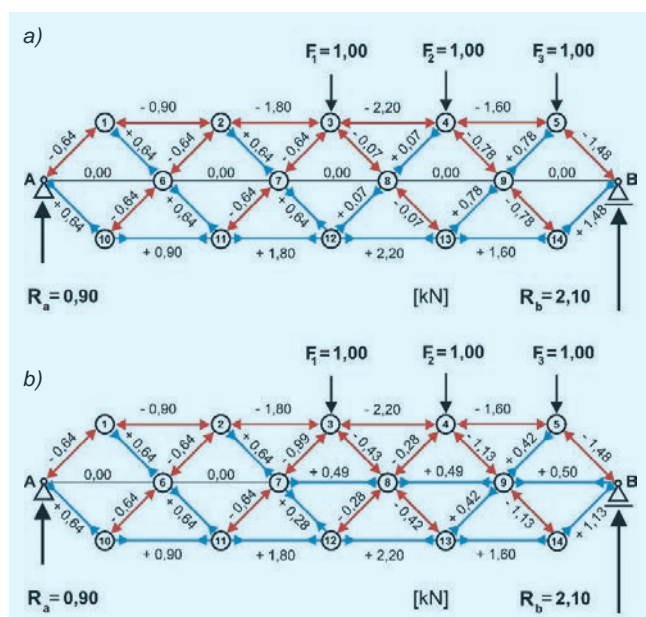
Na podstawie porównania wyników uzyskanych dwiema metodami można stwierdzić, że w określonych obszarach kratownic występuje pełna zgodność wyników, a w innych rejonach wartości sił obliczone dla tych samych prętów znacząco się różnią. Obliczone siły działające w pasach górnym i dolnym kratownicy są identyczne niezależnie od zastosowanej metody. I tak, wartość siły działającej np. w pręcie pomiędzy węzłami 3 oraz 4 wyliczona metodą komputerową (rys. 4b) wynosi  $-2,2$  kN i jest identyczna z wartością siły działającej w tym samym pręcie, obliczoną metodą dwuetapową (rys. 4a). Istotne różnice dotyczą też wielkości sił działających w krzyżulcach. Wartość siły zdefiniowanej metodą dwuetapową w pręcie pomiędzy węzłami 4 oraz 8 jest równa 0,07 kN (rys. 4a), co oznacza, że jest to siła rozciągająca. Z kolei siła działająca w tym samym krzyżulcu, obliczona za pomocą programu komputerowego, ma wartość  $-0,28$  kN, a zatem jest siłą ściskającą. Podobnie duże różnice wartości sił zaobserwowano w prętach tworzących środkowy pas centralny biegnący między węzłami podporowymi A i B, czyli tak jak uprzednio w obszarze występowania sił o bardzo niewielkich wartościach lub równych zero.

## Wnioski

Wartości sił uzyskiwane w programie komputerowym Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2016 są wynikami dokładnymi, ponieważ program ten wykorzystuje złożone procedury obliczeniowe odpowiednie dla układów statycznie niewyznaczalnych. Metoda dwuetapowa jest metodą przybliżoną, jednak stopień dokładności jej wyników może w przyszłości znacznie wzrosnąć dzięki zastosowaniu odpowiednich współczynników określanych indywidualnie dla każdego węzła i uwzględniających zróżnicowanie sztywności prętów łączących się w tym węźle.

## LITERATURA

1. Rębielak J. „Przestrzenne struktury prętowo-ciężnowe. Konstrukcje nośne przekryć powłokowych. Część 1”. *Architektura*. 1 (1983): s. 69–70; „Przestrzenne struktury prętowo-ciężnowe. Konstrukcje nośne przekryć powłokowych. Część 2”. *Architektura*. 2 (1983): s. 69–70.
2. Kolendowicz T. „Mechanika budowli dla architektów”. Warszawa: Arkady, 1993.
3. Allen E., Zalewski W., Boston Structures Group. „Form and Forces. Designing efficient, expressive structures”. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2010.
4. Timoshenko S.P. „Historia wytrzymałości materiałów”. Warszawa: Arkady, 1966.
5. Makowski Z.S. „Analysis, design and construction of double-layer grids”. London: Applied Science Publishers, 1981.
6. Rębielak J. „Simple method of approximate calculation of statically indeterminate trusses”. *Proceedings of the 7th International Conference on Computational Methods (ICCM2016)*, 1–4 sierpnia 2016 r., University of California, Berkeley, USA, s. 748–753 ([www.sci-en-tech.com/ICCM](http://www.sci-en-tech.com/ICCM)).



Rys. 4. Wartości sił w prętach badanej kratownicy podstawowej, obliczone: a) metodą dwuetapową, b) za pomocą programu komputerowego