Wykorzystanie optymalizacji do zmiany częstości własnych zębnika

Application of optimization to change eigenfrequency of a pinion

JACEK STADNICKI MICHAŁ GŁĄBEK*

DOI: https://doi.org/10.17814/mechanik.2017.7.81

W końcowej fazie projektowania zębnika eksploatowanego przy różnych prędkościach obrotowych może się pojawić potrzeba odsunięcia częstości własnych od częstości wymuszeń. W artykule opisano sposób rozwiązania tego problemu z wykorzystaniem optymalizacji parametrycznej zarysu otoczki koła zębatego, przy założeniu małej ingerencji w jej kształt. Zadanie rozwiązano na przykładzie monolitycznego zębnika przekładni lotniczej z użyciem modelu MES.

SŁOWA KLUCZOWE: budowa i eksploatacja maszyn, analiza modalna, odstrojenie częstości własnych, optymalizacja parametryczna

During the final stage of designing a pinion which is exploited at different rotational speeds, it is occasionally necessary to offset natural frequencies from frequencies of excitations. The way of solving this problem by means of parametric optimization of the pinion profile, assuming small changes of its shape, is discussed in the paper. The problem is solved using finite element model with regard to monolithic pinion of an aircraft gear.

KEYWORDS: mechanical engineering, modal analysis, offset of natural frequencies, parametric optimization

W wysokoobrotowych przekładniach lotniczych zębniki często wykonuje się jako monolityczne, a z uwagi na potrzebę ograniczenia ciężaru własnego ich wałki są drążone. Podczas projektowania zębnika na podstawie wyników obliczeń sprawdzających ustala się parametry uzębienia oraz kształt i wymiary otoczki oraz wałka, biorąc pod uwagę przede wszystkim kryteria bezpieczeństwa i trwałości oraz względy konstrukcyjne. Spełnienie tych wymagań skutkuje niekiedy zaprojektowaniem takiego zębnika, którego częstości drgań własnych mieszczą się w zakresach częstości wymuszeń wynikających z zakresów prędkości obrotowych występujących podczas eksploatacji przekładni – leżą w obszarach rezonansowych. Dotyczy to zwłaszcza przekładni, które pracują przy różnych roboczych prędkościach obrotowych, np. przekładni lotniczych.

Skoro zębnik spełnia wymagania dotyczące bezpieczeństwa i trwałości oraz względy konstrukcyjne, pojawia się pytanie, jak zmienić te częstości drgań własnych, które leżą w obszarach rezonansowych, lub – inaczej mówiąc – jak odstroić niektóre częstości własne od częstości wymuszających. Rozwiązanie tego problemu nieuchronnie prowadzi do zmian kształtu i wymiarów zębnika, którego projekt jest już na zaawansowanym etapie – z tego względu poszukuje się metod, które w minimalnym stopniu zmieniają ten projekt. W praktyce wskazuje się te części koła zębatego, których modyfikacja nie narusza spełnionych już wymagań bezpieczeństwa i trwałości oraz przyjętych założeń konstrukcyjnych.

Analiza modalna zębnika przekładni lotniczej

Model MES zębnika. W wyniku analizy modalnej zębnika przekładni lotniczej otrzymuje się zbiór częstości i postaci drgań własnych (swobodnych), zwany modelem modalnym. Taką analizę przeprowadzono z wykorzystaniem metody elementów skończonych w środowisku NX 9 Nastran [2]. Na rys. 1 pokazano model MES zebnika (z uwagi na ochronę danych producenta uzębienie koła przedstawiono w sposób poglądowy). Zębnik zamodelowano za pomocą ośmiowęzłowych, bryłowych elementów heksagonalnych typu CHEXA8 (rys. 1a), a podparcie wałka w łożyskach tocznych - za pomocą elementów typu RBE3 z węzłami niezależnymi na obwodzie otworu wałka w płaszczyźnie elementów tocznych łożyska oraz z węzłem zależnym w osi symetrii wałka (rys. 1b). W punktach, w których są ulokowane węzły zależne dla lewego i prawego łożyska, utworzono pary koincydentnych węzłów, które połączono zerowymiarowymi elementami typu CELAS1 o trzech sztywnościach translacyjnych (w kierunkach X, Y i Z) oraz jednej sztywności rotacyjnej (wokół osi X). Wartości liczbowe sztywności przyjęto na tyle duże (odpowiednio 1 · 10¹⁰ N/mm oraz 1 · 10¹⁰ N·mm), aby w porównaniu z wałem elementy te mogły być traktowane jako sztywne. Następnie jednemu z węzłów elementów CELAS1 odebrano wszystkie stopnie swobody. Taki sposób podparcia dobrze odwzorowuje rzeczywiste warunki pracy zębnika i eliminuje przesztywnienie modelu MES.



Rys. 1. Model MES zębnika przekładni lotniczej (a) oraz model podparcia w łożyskach (b)

Opracowany model MES zębnika ma 46 095 stopni swobody. W wyniku przeprowadzonej analizy modalnej modelu MES zębnika otrzymano zbiór częstości i postaci własnych drgań swobodnych. Wartości kilku pierwszych częstości własnych, istotnych z uwagi na możliwość wystapienia rezonansu, oraz odpowiadające im postacie własne pokazano na rys. 2. Częstości własne oznaczono według konwencji ω_i^k , gdzie *i* oznacza liczbę porządkową, natomiast k - liczbę średnic węzłowych, wokół których odbywa się ruch wieńca koła zębatego podczas drgań. Można zauważyć, że pary częstości ω_1^0 i ω_2^0 , ω_4^1 i ω_5^1 oraz ω_7^2 i ω_8^2 to te same częstości własne z odpowiadającymi im tymi samymi postaciami własnymi przesuniętymi w fazie. Co istotne dla dalszej analizy, w parach ω_4^{-1} i ω_5^{-1} oraz ω_7^2 i ω_8^2 przesunięcie fazowe powoduje obrót postaci własnej drgań wieńca zębatego wokół osi obrotu zębnika.

^{*} Prof. dr hab. inż. Jacek Stadnicki (jstadnicki@ath.bielsko.pl), Michał Głąbek – Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej



Rys. 2. Postacie i częstości drgań własnych

Wykres Campbella. W praktyce inżynierskiej dla porównania wyników analizy modalnej zębnika – wirnika – z jego prędkościami obrotowymi, będącymi wymuszeniami drgań, stosuje się wykres Campbella [1]. Na osi rzędnych podaje się częstości własne ω_i^k (w Hz), a na osi odciętych – obroty wymuszeń n (w obr/min). Analizowany zębnik jest eksploatowany przy obrotach odpowiadających następującym stanom pracy przekładni lotniczej:

- obroty minimalne: n_{min} = 5500 obr/min,
- przelot: n_p = 8500 obr/min,
- wznoszenie: n_w = 9500 obr/min,
- obroty maksymalne: n_{max} = 11000 obr/min,
- obroty graniczne (105% n_{max}): n_{gr} = 11500 obr/min.

Wykres Campbella przedstawiono na rys. 3. Pokazano na nim także linię wymuszenia obrotami zębnika (obroty narastająco od 0 do ngr w Hz) oraz linię wymuszenia od zazębienia (dla 35 zębów koła, narastająco od 0 do 35 n_{ar} w Hz). Linie na wykresie odpowiadające częstościom własnym ω_4^1 i ω_7^2 nie biegną w poziomie, lecz są parami prostych rozchylonych pod niewielkim kątem. Jest to spowodowane obrotami zębnika wokół własnej osi. Na ruch wieńca koła względem średnicy węzłowej, spowodowany drganiami, wpływa ruch unoszenia - obroty zębnika. W zależności od tego, czy te ruchy są zgodne, czy są przeciwne w fazie, następuje odpowiednio zwiększanie bądź zmniejszanie częstości własnej. Zjawisko to można zaobserwować na podstawie wyniku analizy modalnej. Jeśli tej samej częstości własnej drgań zębnika (wieńca) odpowiadają różne, przesunięte w fazie postacie własne, dla których można wskazać średnice węzłowe, to mamy do czynienia ze zmianą częstości własnej spowodowaną obrotami zębnika (efekt ten nazywa się także efektem usztywnienia spowodowanego siłą odśrodkową). Wówczas na wykresie Campbella taka częstość własna jest reprezentowana przez dwie wychodzące z jednego punktu proste o równaniach:

$$\omega_i k(n) = \omega_i k(0) \pm k \cdot n \tag{1}$$

Optymalizacja parametryczna kształtu zębnika – odstrojenie częstości rezonansowych

Na wykresie (rys. 3) zidentyfikowano dwa punkty (zaznaczone kwadratami \Box 1 i \Box 2), w których występuje potencjalne zagrożenie rezonansem. Dolna prosta częstości rezonansowej ω_7^2 przecina prostą wymuszenia od zazębienia w punkcie 1, natomiast prosta częstości rezonansowej ω_6^0



Rys. 3 Wykres Campbella dla zębnika

 – w punkcie 2. Punkt 1 leży w obszarze rezonansowym dla wznoszenia, a punkt 2 - dla przelotu. Ponieważ odstrojenie częstości rezonansowych należy przeprowadzić z możliwie małą ingerencją w kształt otoczki zębnika, zadanie rozwiązano za pomocą narzędzia NX Optimizer do optymalizacji parametrycznej. Z uwagi na osiową symetrię jako parametry - zmienne decyzyjne - przyjęto wielkości definiujące profil w promieniowym przekroju zębnika. Na rys. 4 pokazano parametry, które będą zmieniane podczas optymalizacji (p51 = x_1 , p52 = x_2 , p53 = x_3 , $p82 = x_4$, $p55 = x_5$), oraz ich wartości początkowe (w mm). Dla zachowania integralności profilu niezbędne są odpowiednie wiązania, które oznaczono symbolem O: O1 to punkt nieruchomy, O2 - więzy symetrii punktu według osi 6, O3 i O4 - styczność odcinka i łuku oraz więzy symetrii według osi 6, a O5 to styczność łuku i jego poziomego przedłużenia.



Rys. 4. Parametryzacja profilu

Ponieważ częstości własne ω_4^1 , ω_6^0 i ω_7^2 odpowiadają postaciom własnym wywołanym przez deformację wieńca zębatego i są ze sobą sprzężone, sformułowano następujące zadanie optymalizacji:

$$Q(\mathbf{x}) = \omega_4^{-1}(\mathbf{x}) \to \max, \text{ gdzie } \mathbf{x} = [x_1, x_2, ..., x_5]^T$$
 (2)

przy ograniczeniach:

• 5540 $\leq \omega_7^2 \leq$ 5550 Hz, $\Box 1$ (rys. 3) w połowie między obrotami przelotu i wznoszenia,

• $\omega_6^0 \le 4700$ Hz, $\Box 2$ (rys. 3) wystarczająco odsunięty od obrotów przelotu.

Rozwiązaniem optymalnym zadania (2) są parametry profilu (rys. 4) o następujących wartościach (w nawiasach podano procentowe zmiany wartości początkowych po optymalizacji):

- $p51 = x_1 = 5,34 \text{ mm} (-4,6\%), p52 = x_2 = 5,76 \text{ mm} (-10\%),$
- $p53 = x_3 = 2,61 \text{ mm} (-10\%), p83 = x_4 = 0,98 \text{ mm} (-2\%),$
- p55 = x₅ = 5,78 mm (+7%).

Na rys. 5 porównano kształt profilu przed optymalizacją i po niej. Zmiany profilu (otoczki zębnika) po optymalizacji



Rys. 5. Profile przed optymalizacją i po optymalizacji

nie spowodowały naruszenia kryteriów bezpieczeństwa, a ponadto zapewniają spełnienie wszystkich wymagań konstrukcyjnych.

Zębnik o optymalnych wymiarach profilu ma następujące częstości własne (w nawiasach podano zmiany częstości własnych w Hz w odniesieniu do wartości z rys. 2, które otrzymano w wyniku analizy modalnej zębnika przed optymalizacją):

• ω_1^0 = 2839 Hz (+23), ω_3^0 = 3613 Hz (+3),

- $\omega_4^1 = 3595 \text{ Hz} (-339), \ \omega_6^0 = 4688 \text{ Hz} (-375),$
- $\omega_7^2 = 5551 \text{ Hz} (-196)$

Nanosząc te wartości na wykres Campbella (rys. 3), można sprawdzić, że żadna z częstości własnych zębnika po optymalizacji nie leży w obszarze rezonansu dla żadnej z częstości wymuszających.

Podsumowanie

Problem opisany w artykule pozwala sformułować następujące ogólniejsze wnioski:

 Jeśli projekt jest w końcowej fazie opracowywania, a mimo to nie spełnia danego wymagania, to należy poszukiwać takich parametrów, których zmiana w określonym (zazwyczaj niewielkim) zakresie zapewni spełnienie wszystkich wymagań projektu.

 Największe szanse na rozwiązanie problemu nieznacznej zmiany kształtu części w końcowej fazie opracowywania jej projektu dają powierzchnie swobodne, które nie są wymiarowane z użyciem pasowań i tolerancji.

 Dobrą metodą poszukiwania zmienionego kształtu powierzchni swobodnych w końcowej fazie projektu jest parametryzacja zarysu (profilu) części, a następnie sformułowanie i rozwiązanie zadania optymalnego wyboru parametrów zarysu z uwagi na przyjęte kryterium.

 Współczesne programy do komputerowego wspomagania projektowania udostępniają skuteczne narzędzia do optymalizacji parametrycznej modelu MES.

LITERATURA

- Swanson E., Powell C.D., Weissman S. "A practical review of rotating machinery critical speeds and modes". *Sound and Vibration*. 39 (2005) 5: s. 10–17.
- 2. http://nxtutorials.com (2016) NX9 Nastran User's Guide.