

Analiza przekładni planetarnej zamodelowanej grafem konturowym z uwzględnieniem metody struktur rozgrywających parametrycznie

Analysis of a planetary gear modeled with a contour graph taking into account the method of parametric play structures

ADAM DEPTUŁA
JÓZEF DREWNIĄK
MARIAN A. PARTYKA *

DOI: <https://doi.org/10.17814/mechanik.2017.7.98>

Dotychczas teoria grafów była stosowana w modelowaniu przekładni do analizy dynamicznej, kinematycznej, syntezy, analizy struktury, optymalizacji ciągu przełożeń oraz automatycznego projektowania w oparciu o tzw. gramatyki grafowe. Metoda grafów konturowych polega na wyróżnianiu szeregu kolejnych sztywnych ogniw mechanizmów tworzących zamkniętą pętlę (tzw. kontur). Na dalszym etapie istnieje możliwość analizy otrzymanego grafu konturowego jako grafu skierowanego zależności. Przedstawiono idee wykorzystania metody struktur rozgrywających parametrycznie do opisu grafu konturowego przekładni planetarnej.

SŁOWA KLUCZOWE: graf konturowy, przekładnia planetarna, teoria grafów, optymalizacja, struktury rozgrywające parametrycznie

Previous applications of the graph theory concerned the modeling of gears for dynamic analysis, kinematic analysis, synthesis, structural analysis, gearshift optimization and automatic design based on so-called graph grammars. Some tasks can be performed only by using methods resulting from a graph theory, e.g. enumeration of structural solutions. The contour plot method consists in distinguishing a series of consecutive rigid units of the mechanism, forming a closed loop (so-called contour). At a later stage, it is possible to analyze the obtained contour graph as a directed graph of dependence. The work presents an example of the use of game-tree structures for describing the contour graph of a planetary gear. As a result of the decomposition of the graph in the dependence on each of the vertices, game-tree structures are obtained, which allow calculate algorithmically.

KEYWORDS: contour graph, planetary gear, graph theory, optimization, game-tree structures

Metody grafów i liczb strukturalnych od dawna są znane w mechanice. Ukazało się wiele prac dotyczących wykorzystania teorii grafów w badaniu dynamiki układów, zarówno w zakresie analizy, jak i syntezy złożonych układów

mechanicznych [1–5]. W odróżnieniu od grafów struktury dendrytowo-drzewiaste nie mają cykli, ale mogą mieć różną liczbę wierzchołków początkowych. Dlatego zostało opracowane odmienne podejście jako przetłumaczenie skierowanego grafu zależności m.in. na struktury rozgrywające parametrycznie [6]. Takie podejście odbiega od opracowań literaturowych związanych z systemami sterowania, analizą rangi ważności parametrów konstrukcyjnych i/lub eksploatacyjnych oraz analizą przekładni wcześniej zamodelowanych za pomocą innych rodzajów grafów (Freudensteina, konturowych, Hsu itd.) [7–10]. Celem drzew rozgrywających parametrycznie jest usystematyzowanie procesu decyzyjnego i przestrzeni możliwych stanów analizowanego systemu, np. w optymalizacji parametrów pracy przekładni.

Modele teoriografowe przekładni planetarnych

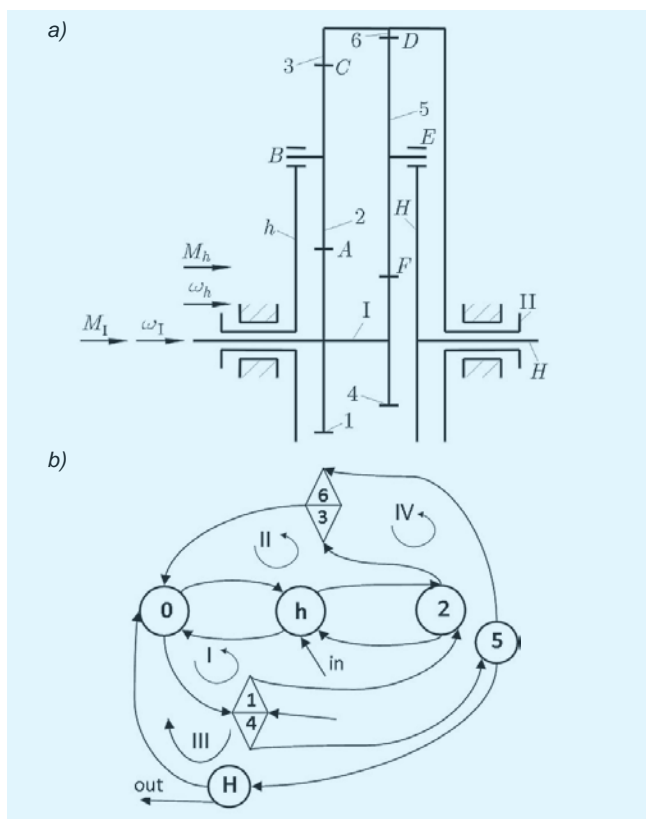
Cele modelowania przekładni grafami były różnorodne, m.in.: analiza dynamiczna, analiza kinematyczna, synteza, analiza struktury, enumeracja, optymalizacja ciągu przełożeń oraz automatyczne projektowanie w oparciu o tzw. gramatyki grafowe. Zaletą takiego modelowania jest to, że modele grafowe rozwiązywane są w sposób algorytmiczny. Wśród metod analizy przekładni planetarnych można wyróżnić metody m.in.: Hsu [8], Freudensteina [9] oraz Marghitu [10].

Model przekładni planetarnej zbudowany na grafie konturowym

Na rys. 1 przedstawiono schemat funkcjonalny oraz graf konturowy przykładowej przekładni planetarnej. Przyjęto: 1, 2, ..., 6 – koła słoneczne, koła planetarne oraz pierścienie z uzębieniem wewnętrznym.

Możliwa jest grafowa analiza tej przekładni [3, 4]. Dla rozważanej przekładni przyjęto: $z_1 = 15$, $z_2 = 24$, $z_3 = 63(-63)$, $z_4 = 18$, $z_5 = 21$ i $z_6 = 60(-60)$ (gdzie: z_i – liczba zębów na i -tym kole, $i = 1, 2, \dots, 6$), $m = 2$ mm (m – moduł koła), gdzie ujemne wartości liczb zębów są właściwe dla metody. Aby stworzyć pełny graf, należy przeanalizować wszystkie kontury. Dla grafu z rys. 1 można wypisać kody konturów:

* Dr inż. Adam Deptuła (a.deptula@po.opole.pl), prof. dr hab. Marian A. Partyka (m.partyka@po.opole.pl) – Instytut Innowacyjności Procesów i Produktów, Wydział Inżynierii Produkcji i Logistyki Politechniki Opolskiej; dr hab. inż. Józef Drewniak (j.drewniak@ath.bielsko.pl) – Wydział Budowy Maszyn i Informatyki Akademii Techniczno-Humanistycznej w Bielsku-Białej



Rys. 1. Przykładowa przekładnia planetarna: a) schemat funkcjonalny, b) graf konturowy przekładni. Przyjęto: 1, 2, ..., 6 – koła słoneczne, koła planetarne oraz pierścienie z uzębieniem wewnętrznym; h , H – jarzma; A , B , ... F – punkty charakterystyczne; ω , M – prędkości [4]

$$\begin{aligned} I: & 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow h \rightarrow 0; \quad II: 0 \rightarrow h \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 0; \\ III: & 0 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow H \rightarrow 0; \quad IV: 0 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Każdy kontur generuje równania odnoszące się do prędkości obrotowych [3, 4]:

$$\begin{cases} -r_A \omega_1 - r_A \omega_{21} - r_A \omega_{h2} - r_A \omega_{0h} = 0 \\ r_A \omega_{21} + r_B \omega_{h2} = 0 \\ -r_C \omega_{h0} - r_C \omega_{2h} - r_C \omega_{32} - r_C \omega_{03} = 0 \\ r_B \omega_{2h} + r_C \omega_{32} = 0 \\ -r_E \omega_{40} - r_E \omega_{54} - r_E \omega_{H5} - r_E \omega_{0H} = 0 \\ r_F \omega_{54} + r_E \omega_{H5} = 0 \\ -r_D \omega_{40} - r_D \omega_{54} - r_D \omega_{H5} - r_E \omega_{0H} = 0 \\ r_F \omega_{54} + r_E \omega_{H5} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Układ rozwiązano, eliminując niepożądane prędkości względne. Zakładając, że koła są cylindryczne, otrzymuje się następujące zależności:

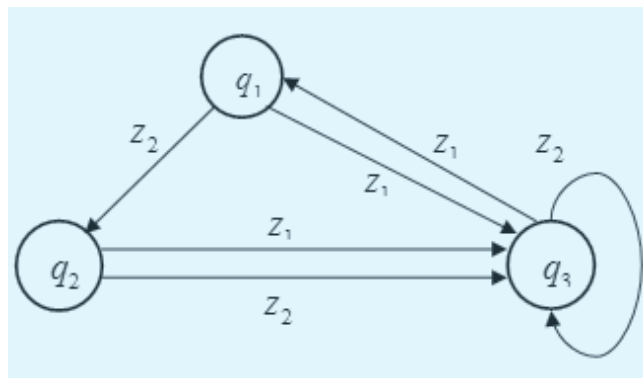
$$r_i = \frac{d_i}{2} = \frac{z_i \cdot m_i}{2} \quad (2)$$

gdzie: d_i – średnica i -tego koła, m_i – moduł i -tego koła, z_i – liczba zębów na i -tym kole, $i = 1, 2, \dots, 6$.

W pracach [3, 4] przekładnia z rys. 1 jest analizowana klasyczną metodą Willisa. Dodatkowo za pomocą metody grafów konturowych można wyznaczyć momenty działające na element przekładni.

Struktury drzewiaste rozgrywające parametrycznie

Specyficznym rodzajem grafów spójnych (bez cykli) są drzewa. Wiele przykładów drzew dostarczają struktury logiczne, np.: wielowartościowe drzewa logiczne, dendryty, wielochodowe gry [11–15]. Skierowany graf zależności [13, 14] określa wyrażenia analityczne reprezentujące ten graf, a więc będące jego modelem analitycznym. Struktury drzewiaste rozgrywające parametrycznie powstają w wyniku rozkładu skierowanego grafu zależności od każdego z wierzchołków. Istnieją także rozszerzone opracowania zastosowań grafów w badaniach własności hydraulicznych, w których wykorzystano m.in. wielokrotną numerację wierzchołkową oraz współczynnik złożoności struktur rozgrywających parametrycznie.



Rys. 2. Graf skierowany rozgrywający parametrycznie

Na rys. 2 przedstawiono przykładowy skierowany graf zależności rozgrywający parametrycznie.

W wyniku rozkładu grafu od wybranego wierzchołka początkowego q_1 w pierwszym etapie uzyskiwana jest struktura drzewiasta z cyklami G_1^+ :

$$G_1^+ = ({}^0 q_1 ({}^1 z_1 q_3 ({}^2 z_1 q_1, {}^2 z_2 q_3)^2, {}^2 z_2 q_2 ({}^2 z_1 q_3, {}^2 z_2 q_3)^2)^1)^0 \quad (3)$$

a następnie ogólna struktura drzewiasta rozgrywająca parametrycznie G_1^{++} :

$$G_1^{++} = ({}^0 q_1 ({}^1 z_1 q_3 ({}^2 z_1 q_1^1, {}^2 z_2 q_3^1)^2, {}^2 z_2 q_2 ({}^2 z_1 q_3 ({}^3 z_1 q_1^2, {}^3 z_2 q_3^1)^3, {}^3 z_2 q_3 ({}^3 z_1 q_1^2, {}^3 z_2 q_3^1)^3)^1)^0 \quad (4)$$

Algorytm rozkładu grafu zależności na strukturę rozgrywającą parametrycznie wraz z uzyskanymi strukturami przedstawiono m.in. w [15].

Zastosowanie struktur rozgrywających parametrycznie w analizie przekładni planetarnej zamodelowanej grafem konturowym

Dla grafu konturowego z rys. 1, odpowiadającego analizowanej przekładni, można wyznaczyć zbiór $D(G_1^{++})$ struktur rozgrywających parametrycznie odpowiadających sześciu kołom planetarnym: 1, 2, 3, 4, 5, 6:

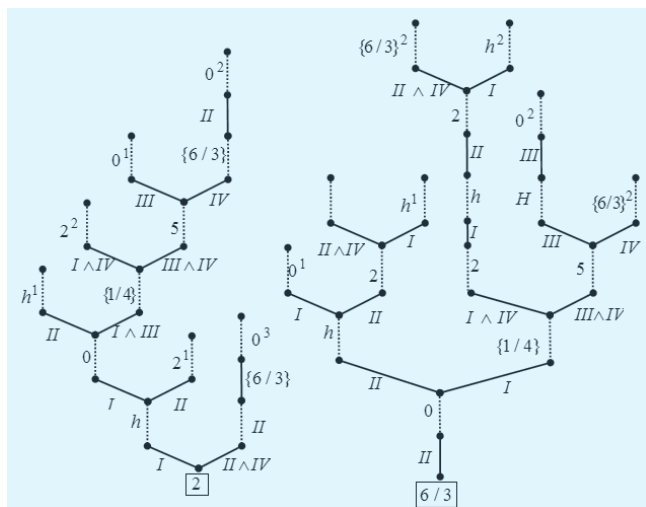
$$D(G_1^{++}) = \{G_0^{++}, G_2^{++}, G_{\{1,4\}}^{++}, G_{\{3,6\}}^{++}, G_5^{++}\} \quad (5)$$

Struktury drzewiaste rozgrywające parametrycznie powstają po usunięciu cykli z pierwotnych drzew powstałych w początkowej fazie rozkładu grafu. Wyrażenia analityczne (6–7) opisują przykładowe struktury drzewiaste rozgrywające parametrycznie G_2^+ , $G_{\{6/3\}}^+$:

$$G_{p2}^{++} = ({}^0 2({}^1 [I] \cdot h({}^2 [II] \cdot 2^1, [I] \cdot 0({}^3 [III] \cdot h^1, [I \wedge III] \cdot [1/4({}^4 [I \wedge IV] \cdot 2^2, [III \wedge IV] \cdot 5({}^5 [III] \cdot H({}^6 [III] \cdot 0^1, [IV] \cdot [6/3]({}^7 [II] \cdot 0^2)^6)^5)^4)^3)^2, [II \wedge IV] \cdot [6/3]({}^2 [II] \cdot 0^2)^1)^0 \quad (6)$$

$$G_{6/3}^{++} = ({}^0 6/3({}^1 [II] \cdot 0({}^2 [II] \cdot h({}^3 [II] \cdot 2({}^4 [I] \cdot h^1, [II \wedge IV] \cdot \{6/3\}^1)^4, [I] \cdot 0^1)^3, [I] \cdot 1/4({}^3 [I \wedge IV] \cdot 2({}^4 [I] \cdot h({}^5 [II] \cdot 2({}^6 [I] \cdot h^2, [II \wedge IV] \cdot \{6/3\}^2)^6)^5)^4, [III \wedge IV] \cdot 5({}^4 [III] \cdot H({}^5 [III] \cdot 0^2)^5, [IV] \cdot \{6/3\}^3)^4)^3)^2)^1)^0 \quad (7)$$

Na rys. 3 przedstawiono struktury rozgrywające parametrycznie od wierzchołków G_2^+ , $G_{6/3}^+$ dla wyrażeń (6) i (7).



Rys. 3. Struktury rozgrywające parametrycznie od wierzchołków 2 i {6/3}

Struktury rozgrywające parametrycznie od wszystkich wierzchołków budujących skierowany graf zależności z rys. 1, a także ich szczegółowy zapis analityczny przedstawiono w [16].

Zalety metod grafowych to algorytmiczne ujęcie problemów oraz możliwość realizowania innych zadań, np.: algorytmiczne znajdowanie kół nadmiarowych lub enumeracja rozwiązań konstrukcyjnych. W tym ujęciu struktury rozgrywające parametrycznie mogą w lepszy sposób odwzorowywać możliwości algorytmiczne danej przekładni.

Wnioski

Dzięki zastosowaniu metody struktur parametrycznych można uzyskać lepsze odwzorowanie przekładni planetarnej w obszarach analizy strukturalnej i analizy wyrażeń podrzędności:

- **Analiza strukturalna:** Każda struktura rozgrywająca parametrycznie może opisywać niezależny zgrupowany system relacyjny preferencji. Wynika to z faktu, że przeszukiwanie rozwiązań na strukturze ma właściwości grafu zorientowanego [17], a dodatkowa wielokrotna numeracja wierzchołkowa pozwala na indeksowanie (zaznaczanie) zarówno wierzchołków, jak i krawędzi na podstawie analizy indeksów krawędzi incydentnych z tymi wierzchołkami. Dodatkowo struktury rozgrywające parametrycznie rozróżniają decyzje dotyczące pojedynczych konturów. Jest to niezwykle ważne, gdyż w wyniku przeprowadzenia

operacji na grafie w celu dokonania jego orientacji i rozkładu na struktury parametryczne mogą się pojawić równania tożsamościowo spełnione i będzie można określić daną zmienną za pomocą więcej niż jednej zależności.

- **Analiza wyrażeń podrzędności:** Wyrażenie opisujące stopień podrzędności danego grafu składowego, czyli struktury rozgrywającej parametrycznie, oznaczane jest parą nawiasów $(^k \dots)^k$, wewnątrz której zapisuje się wyrażenie będące modelem analitycznym. Ciąg utworzony z symboli opisujących wierzchołki i krawędzie (parametry konstrukcyjne i/lub funkcje) może podlegać procesom faktoryzacji, czyli znalezienia postaci iloczynowej na podstawie iloczynu sum lub dekompozycji, czyli rozkładu za pomocą zbioru funkcji. W zapisie analitycznym może podlegać procesom ekstrakcji, czyli wyrażenia wielu funkcji za pomocą zbioru nowych funkcji lub zastępowania jednej struktury drugą.

LITERATURA

1. Bishop R.E.D., Gladwell G.M.L., Michaelson S. „Macierzowa analiza drgań”. Warszawa: WNT 1972.
2. Drewniak J., Stanisław Z. „Graph methods in kinematical analysis of multi-speed epicyclic Sears”. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 17, 3 (2012): s. 791–798.
3. Drewniak J., Stanisław Z. „Linear-graph and contour-graph-based models of planetary Sears”. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 48, 2 (2010): s. 415–433.
4. Zawiślak S. „The Graph-based Methodology as an Artificial Intelligence Aid for Mechanical Engineering Design”. Wydawnictwo Akademii Techniczno-Humanistycznej, 2010.
5. Orlikowski C. „Symbolic analysis of bond graphs by application of Coate’s rule”. 1st Inter. Confer. on Graphs and Mechanics. Ustroń (vol. 1). Gliwice: Polit. Śląs., 1993.
6. Deptuła A., Partyka M.A. „Application of game graphs in optimization of dynamic system structures”. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 15, 3 (2010): s. 647–656.
7. Tsai L.W. „Enumeration of kinematic structures according to function”. CRC Press, Boca Raton, FL 33487. USA, 2001.
8. Hsu C.H. „Graph notation and kinematic equations of motion of planetary gear trans”. *International J. of Vehicle Design*. 13, 3 (1992): s. 233–241.
9. Freudenstein F. „An application of Boolean algebra to the motion of epicyclic driver”. *ASME Journal of Engineering for Industry*. B, 93 (1971): s. 176–182.
10. Marghitu D. „Kinematic chains and machine components design”. London, Amsterdam, San Diego: Elsevier. Academic Press, 2005.
11. Partyka M.A. „The Quine-Mc Cluskey minimization algorithm of individual multiple – valued logical functions for structural classification of informations and its applications for fifth generation computer systems and artificial intelligence”. *Inter. Congr. Log. Collog. Jour. Symb. Logic*. 52, 1 (1985).
12. Deptuła A., Partyka M.A., Łuszczyna R. „Zastosowanie graficznych metod decyzyjnych metodologii projektowania i zarządzania na przykładzie CAD układów maszynowych. St. i Monog. 315; Opole: Ofic. Wydawn. Polit. Opol., 2012.
13. Deptuła A., Partyka M.A. „Application of dependence graphs and game trees for decision decomposition for machine systems”. *JAM-RIS – Journal of Automation, Mobile Robotics & Intelligent Systems*. 5, 3 (2011): s. 17–26.
14. Deptuła A., Partyka M.A. „Application of game graphs in optimization of dynamic system structures”. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 15, 3 (2010): s. 647–656.
15. Deptuła A., Partyka M.A. „Badanie własności dynamicznych układów maszynowych z uwzględnieniem wielokrotnej numeracji wierzchołkowej dla drzew rozgrywających parametrycznie”. *Napędy i Sterowanie*. 3 (2010): s. 140–147.
16. Deptuła A., Drewniak J., Partyka M.A. „Analiza przekładni planetarnej zamodelowanej grafem konturowym z uwzględnieniem metody struktur rozgrywających parametrycznie”. *Materiały konferencyjne – XXI Międzynarodowa Szkoła Komputerowego Wspomagania, Projektowania, Wytwarzania i Eksploatacji*. WAT. Jurata, 2017, s. 93–105.
17. Karpow W.G., Popyrin L.S., Epelsztejn W.W. „Awtomatizacja postrojenia dla rasczeta schizm tieploenergeticheskikh ustanowok”. 1973: s. 129–137.