

# O kryteriach pęknięcia materiałów sprężysto-plastycznych

## Selected fracture criteria of elastic-plastic materials

MARCIN GRABA\*

DOI: <https://doi.org/10.17814/mechanik.2017.12.201>

English version available on: [www.mechanik.media.pl](http://www.mechanik.media.pl)

Przedstawiono przegląd wybranych kryteriów pęknięcia materiałów sprężysto-plastycznych. Kryteria te – jako jedne z wielu – mogą zostać wykorzystane do oceny rzeczywistej odporności na pęknięcie różnych materiałów konstrukcyjnych, o ile użytkownik dysponuje wymaganymi parametrami, definiowanymi z wykorzystaniem mechaniki pęknięcia.

**SŁOWA KLUCZOWE:** kryteria pęknięcia, więzy geometryczne, całka  $J$ , odporność na pęknięcie

*The paper presents a brief overview of selected fracture criteria of elastic-plastic materials. These criteria, ones of many, can be used to assess the real fracture resistance of different construction materials, provided the user has the required parameters defined by the fracture mechanics.*

**KEYWORDS:** fracture criteria, geometric constraints,  $J$ -integral, fracture toughness

Wykorzystanie sprężysto-plastycznej mechaniki pęknięcia w analizie inżynierskiej nie jest ograniczone jedynie do oceny rozkładu pól naprężeń i odkształceń przed wierzchołkiem pęknięcia. Obecnie mechanika pęknięcia obejmuje również: ocenę poziomu wyężenia konstrukcji zawierającej defekty (ocenę obciążeń granicznych, nośności granicznej), analizę z wykorzystaniem właściwych diagramów zniszczenia czy ocenę rzeczywistej odporności na pęknięcie elementów konstrukcyjnych z defektami [1–3]. O ile ocena nośności granicznej (względnie obciążeń granicznych) i analiza według właściwych diagramów zniszczenia (w podstawowym podejściu) [1] nie wymagają znajomości zbyt wielu parametrów mechaniki pęknięcia, charakteryzujących materiał elementu konstrukcyjnego, to do zastosowania wybranych kryteriów pęknięcia oprócz wiedzy o podstawowych stałych materiałowych (granicy plastyczności  $\sigma_0$ , module Younga  $E$  czy wykładniku umocnienia  $n$  w prawie Ramberga-Osgooda) konieczna jest znajomość parametrów pola HRR [4, 5] oraz wybranych miar więzów geometrycznych, zdefiniowanych w pracach [6, 7].

Wśród miar więzów geometrycznych (czyli ograniczeń – zależnych od geometrii i stałych materiałowych – jakie materiał konstrukcyjny stawia odkształceniom plastycznym rozwijającym się pod wpływem obciążenia zewnętrznego [6, 7]) można wyróżnić: naprężenia  $Q$  [8], parametr trójosiowości naprężeń  $T_z$  [9], naprężenia średnie  $\sigma_m$  normalizowane przez granicę plastyczności lub przez naprężenia efektywne (odpowiednio  $\sigma_m/\sigma_0$  lub  $\sigma_m/\sigma_{eff}$ ) [10]. Do parametrów będących miarami więzów geometrycznych zalicza się również parametry  $Q^*$  i  $Q_m^*$  [11, 12] oraz omówiony we wspomnianych pracach parametr  $T_m$ , czyli uśredniony po grubości próbki (elementu konstrukcyjnego) współczynnik trójosiowości naprężeń  $T_z$  [14]. Uśrednione po grubości próbki wartości  $Q_m^*$  i  $T_m$  zostały już wykorzystane do opisu pól naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia w materiałach sprężysto-plastycznych dla zagadnień 3D [13], a także w propozycji kryterium pęka-

nia, podanej w 2012 r. [15]. To kryterium w najbardziej ogólnej postaci można zapisać jako:

$$J_c = J_{IC} \cdot \frac{I_n(n, T_m)}{I_n(n, T_{m,ref})} \cdot \left[ \frac{\tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n, T_{m,ref})}{\tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n, T_m)} \cdot \left( \frac{\sigma_c - \sigma_0 \cdot Q_m^*(n, T_m) \delta_{ij}}{\sigma_c - \sigma_0 \cdot Q_{m,ref}^*(n, T_{m,ref}) \delta_{ij}} \right) \right]^{1+n} \quad (1)$$

gdzie:

$J_c$  – poszukiwana rzeczywista odporność na pęknięcie (wyznaczona za pomocą całki  $J$  [16]);

$J_{IC}$  – krytyczna wartość całki  $J$ , wyznaczona doświadczalnie zgodnie z normą [16] dla próbki zdominowanej przez płaski stan odkształcenia (p.s.o.);

$I_n(n, T_m)$ ,  $I_n(n, T_{m,ref})$ ,  $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n, T_m)$ ,  $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n, T_{m,ref})$  – funkcje, które można wyznaczyć na podstawie danych literaturowych lub z wykorzystaniem programu komputerowego zaprezentowanego w pracy [17] dla wartości parametru  $T_m$  (charakteryzującego poziom trójosiowości naprężeń dla analizowanego elementu) lub parametru  $T_{m,ref}$  (charakteryzującego poziom trójosiowości naprężeń dla próbki, dla której określono  $J_{IC}$ );

$\theta$  – współrzędna w biegunowym układzie współrzędnych  $(r, \theta, z)$ , zaczepionym w wierzchołku pęknięcia w osi próbki (elementu konstrukcyjnego);

$Q_m^*$  i  $Q_{m,ref}^*$  – uśrednione po grubości próbki wartości parametru  $Q^*$  [11–13], odpowiednio dla rozpatrywanego elementu konstrukcyjnego, dla którego poszukuje się odporności na pęknięcie  $J_c$ , oraz próbki, dla której doświadczalnie określono wartość  $J_{IC}$  (parametry  $Q_m^*$  oraz  $Q_{m,ref}^*$  zależą od wykładnika umocnienia  $n$  oraz wartości parametru  $T_m$ );

$\sigma_c$  – naprężenia krytyczne, które można wyznaczyć dla danego materiału na podstawie doświadczeń laboratoryjnych i obliczeń numerycznych, względnie można je znaleźć w literaturze [18];

$\delta_{ij}$  – delta Kroneckera.

Kryterium pęknięcia materiałów sprężysto-plastycznych (1) zostało szczegółowo omówione w pracy [15], gdzie poddano je weryfikacji z wykorzystaniem powszechnie akceptowalnych wyników badań doświadczalnych, zaprezentowanych w pracy [19]. Warto zaznaczyć, że kryterium przedstawione w [15] jest prawdziwe dla trójwymiarowych elementów konstrukcyjnych, natomiast kryteria przedstawione w [8, 18] dotyczą płaskiego stanu odkształcenia.

Bazując na sposobie określenia kryterium pęknięcia opisanym w [15], można zaproponować analogiczne podejścia z zastosowaniem innych parametrów więzów geometrycznych, takich jak:

• iloraz normalnych naprężeń średnich  $\sigma_m$  i granicy plastyczności  $\sigma_0$ :

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_0} = \frac{1}{\sigma_0} \cdot \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})}{3} \quad (2)$$

gdzie:  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$  – składowe normalne tensora naprężenia;

\* Dr inż. Marcin Graba (mgraba@tu.kielce.pl) – Katedra Technologii Mechanicznej i Metrologii, Wydział Mechatroniki i Budowy Maszyn Politechniki Świętokrzyskiej

- iloraz normalnych naprężeń średnich  $\sigma_m$  oraz naprężeń efektywnych  $\sigma_{eff}$  według hipotezy HMH –  $\sigma_m/\sigma_{eff}$ ;
- parametr  $Q^{ps0}$  będący znormalizowaną przez granicę plastyczności różnicą pomiędzy rzeczywistym rozkładem naprężeń  $\sigma_{22\_MES}$  a rozkładem oszacowanym dla przypadku dominacji p.s.o.  $\sigma_{22\_ps0}$ :

$$Q^{ps0} = \frac{\sigma_{22\_MES} - \sigma_{22\_ps0}}{\sigma_0} \quad (3)$$

gdzie:

$$\sigma_{ij\_ps0} = \sigma_0 \cdot \left( \frac{J}{\alpha \cdot \sigma_0 \cdot \epsilon_0 \cdot I_n(n, ps0) \cdot r} \right)^{\frac{1}{1+n}} \cdot \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n, ps0) \quad (4)$$

przy czym:  $I_n(n, ps0)$ ,  $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n, ps0)$  – funkcje wyznaczone według algorytmu zaprezentowanego w [13, 17] przy założeniu dominacji p.s.o.

Wymienione parametry zawsze należy wyznaczać dla trójwymiarowych obiektów konstrukcyjnych (próbek), aby w proponowanych kryteriach pęknięcia uwzględnić zarówno więzy płaskie, jak i więzy w kierunku grubości [6, 7]. Dalej omówiono propozycje nowych kryteriów pęknięcia materiałów sprężysto-plastycznych wraz z oceną wpływu różnych parametrów mechaniki pęknięcia.

### Dwuparametryczne kryterium pęknięcia $J = J(I_{IC}, Q_m^{ps0})$

Jak już wspomniano, jedną z miar więzów geometrycznych jest parametr  $Q^{ps0}$ . Niektórzy badacze [20, 21] proponowali wyrażenie tego parametru za pomocą wzoru na naprężenia  $Q$ , zdefiniowane przez O'Dowda [8], jako wielkość korygującą rozkład naprężeń uzyskany na podstawie rozwiązania HRR [5, 6]. Ten parametr powinien być liczony w każdym punkcie przed wierzchołkiem pęknięcia, wzdłuż całego jego frontu. Alternatywny wzór na rozkład naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia dla materiałów sprężysto-plastycznych w przypadku zagadnień 3D ma formę:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \cdot \left( \frac{J}{\alpha \cdot \sigma_0 \cdot \epsilon_0 \cdot I_n(n, ps0) \cdot r} \right)^{\frac{1}{1+n}} \cdot \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n, ps0) + Q^{ps0} \cdot \sigma_0 \cdot \delta_{ij} \quad (5)$$

Proponuje się, aby parametr  $Q^{ps0}$  był wyznaczany dla kierunku  $\theta = 0$  oraz odległości  $r = 2J/\sigma_0$ . Wzór (5) jest prawdziwy dla każdego punktu przed frontem pęknięcia. Ten opis w przypadku elementu konstrukcyjnego o określonej grubości i odporności na pęknięcie przyjmuje postać:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \cdot \left( \frac{J}{\alpha \cdot \sigma_0 \cdot \epsilon_0 \cdot I_n(n, ps0) \cdot r} \right)^{\frac{1}{1+n}} \cdot \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n, ps0) + Q_{av}^{ps0} \cdot \sigma_0 \cdot \delta_{ij} \quad (6)$$

gdzie:  $Q_{av}^{ps0}$  – uśredniona po grubości wartość parametru  $Q^{ps0}$ .

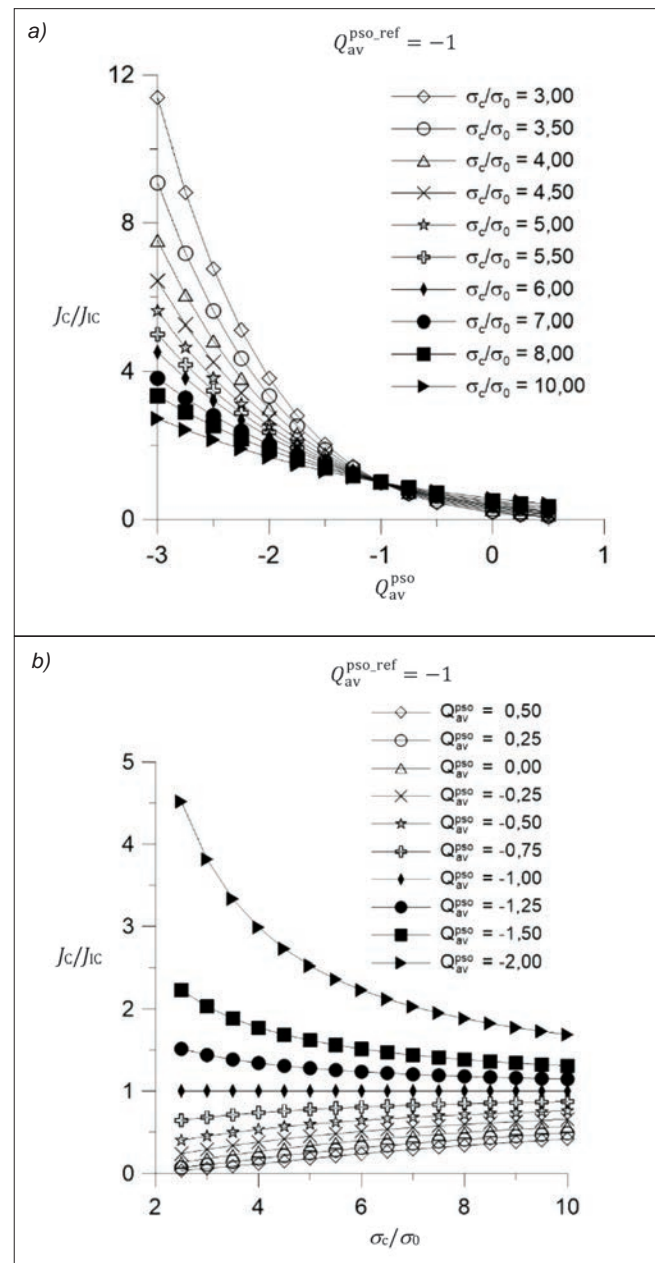
Podczas formułowania kryteriów pęknięcia materiałów sprężysto-plastycznych, które charakteryzują się kruchym mechanizmem pęknięcia, przyjmuje się założenie, że proces pęknięcia zachodzi w momencie, gdy naprężenia rozwierające powierzchnie szczeliny osiągną wartość krytyczną  $\sigma_c$  w określonej krytycznej odległości od wierzchołka pęknięcia, oznaczonej przez  $r_c$  [15, 19, 22]. Tego

typu analizę szczegółowo przedstawiono w pracach [15, 19, 22]. Wykorzystując sposób analizy zaprezentowany w [15], można przez analogię podać alternatywne do [15] kryterium pęknięcia, oparte na parametrze  $Q_{av}^{ps0}$ :

$$J_C = J_{IC} \cdot \left[ \frac{\sigma_c - Q_{av}^{ps0} \cdot \sigma_0 \cdot \delta_{ij}}{\sigma_c - Q_{av}^{ps0\_ref} \cdot \sigma_0 \cdot \delta_{ij}} \right]^{n+1} \quad (7)$$

gdzie:  $J_C$  – poszukiwana rzeczywista odporność na pęknięcie;  $Q_{av}^{ps0}$  – parametr określany dla próbki, dla której poszukuje się  $J_C$  (można skorzystać z katalogu gotowych rozwiązań podanych w [21]);  $Q_{av}^{ps0\_ref}$  – wartość parametru  $Q_{av}^{ps0}$  wyznaczona numerycznie dla próbki, dla której laboratoryjnie określono krytyczną wartość odporności na pęknięcie  $J_{IC}$ ;  $\sigma_c$  – naprężenie krytyczne.

Na rys. 1 zobrazowano hipotetyczne zmiany rzeczywistej odporności na pęknięcie  $J_C$  normalizowanej przez odporność na pęknięcie  $J_{IC}$ , wyznaczaną przy założeniu



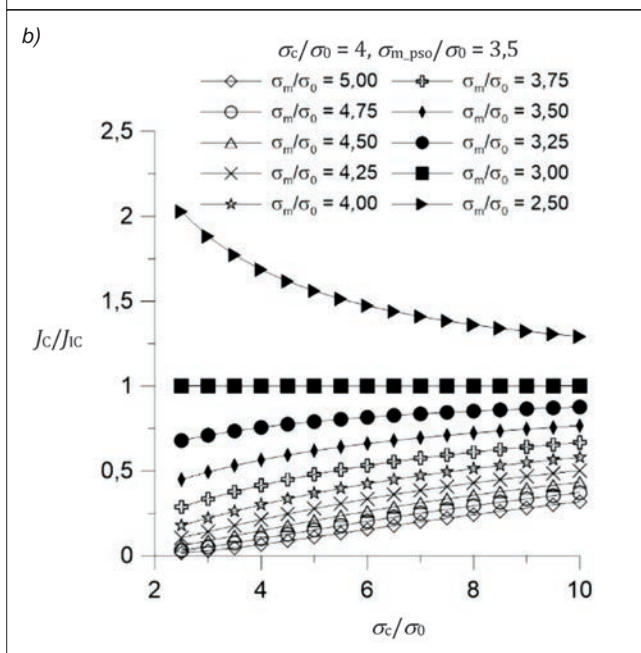
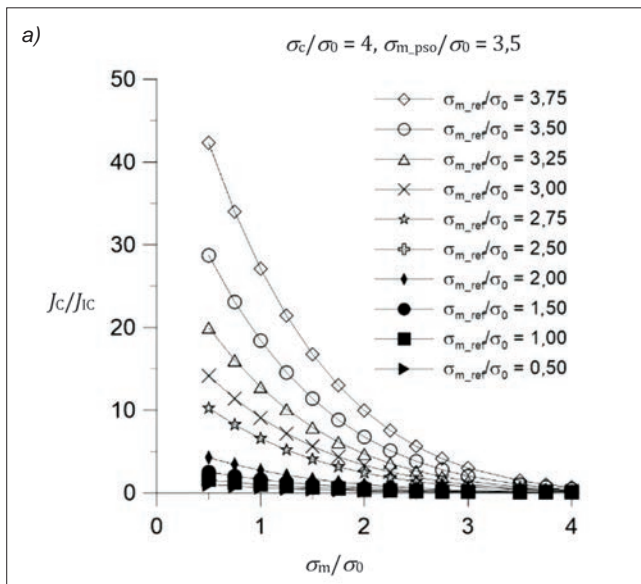
Rys. 1. Wpływ: a) parametru  $Q_{av}^{ps0}$  (dla różnych wartości naprężeń krytycznych  $\sigma_c/\sigma_0$ ) na wartość rzeczywistej odporności na pęknięcie; b) naprężeń krytycznych  $\sigma_c/\sigma_0$  (dla różnych wartości parametru  $Q_{av}^{ps0}$ ) na wartość rzeczywistej odporności na pęknięcie

dominacji p.s.o. Im wyższa jest wartość naprężeń krytycznych  $\sigma_c$ , tym mniejsza wartość rzeczywistej odporności na pękanie  $J_C$ , określanej dla ustalonych wartości parametrów więzów  $Q_{av}^{pso}$  oraz  $Q_{av}^{pso_{ref}}$ . Należy jednak zaznaczyć, że przy określonym poziomie parametrów  $Q_{av}^{pso}$  oraz  $Q_{av}^{pso_{ref}}$  następuje nieznaczne odwrócenie tej tendencji. Im większa jest wartość parametru  $Q_{av}^{pso}$ , tym mniejsza rzeczywista odporność na pękanie  $J_C$ . Można stwierdzić, że im większy poziom więzów (bardziej ujemna wartość parametru  $Q_{av}^{pso}$ ), tym większa odporność na pękanie  $J_C$ .

**Dwuparametryczne kryterium pękania  $J = J(J_{IC}, \sigma_m/\sigma_0)$**

W 1995 r. O'Dowd [8], podsumowując dotychczasowe rozważania dotyczące naprężeń  $Q$ , zasugerował, by wyznaczać je nie tylko z uwzględnieniem naprężeń rozwierających powierzchnie pęknięcia, lecz jako parametr uzależniony od naprężeń średnich  $\sigma_m$ :

$$Q_m = \frac{\sigma_{m_{MES}} - \sigma_{m_{pso}}}{\sigma_0} \text{ dla } \theta = 0 \text{ i } r = 2J/\sigma_0 \quad (8)$$



Rys. 2. Wpływ parametrów składowych kryterium pękania opisanego wzorem (11) na rzeczywistą odporność na pękanie: a) wpływ ilorazu  $\sigma_m/\sigma_0$  dla ustalonych wartości  $\sigma_{m_{pso}}/\sigma_0$  oraz  $\sigma_c/\sigma_0$ ; b) wpływ ilorazu  $\sigma_c/\sigma_0$  dla ustalonych wartości  $\sigma_{m_{pso}}/\sigma_0$  oraz  $\sigma_{m_{ref}}/\sigma_0$

Jeżeli zatem naprężenia  $Q$  w proponowanym przez O'Dowda kryterium pękania [8] zastąpi się parametrem  $Q_m$ , można zapisać je w nowej formie:

$$J_C = J_{IC} \cdot \left[ 1 - \frac{Q_m \cdot \sigma_0}{\sigma_c} \right]^{n+1} \quad (9)$$

Rozwinięcie równania (9) prowadzi do następującej formy kryterium pękania:

$$J_C = J_{IC} \cdot \left[ 1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_c} \cdot \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_0} - \frac{\sigma_{m_{pso}}}{\sigma_0} \right) \right]^{n+1} \quad (10)$$

Wzór (10) można zastosować, gdy krytyczną wartość odporności  $J_{IC}$  wyznaczy się laboratoryjnie dla próbki znajdującej się w p.s.o., dla której długość pęknięcia zgodnie z zaleceniami normy wynosi  $a/W = 0,5$ , a wartość parametru  $Q_m = 0$ .

Jednakże w rzeczywistych warunkach laboratoryjnych, mimo że długość pęknięcia wynosi  $a/W = 0,5$ , materiały takich próbek niezmiernie rzadko charakteryzują się poziomem więzów równym zero. Ten fakt należy więc uwzględnić w kryterium pękania, wprowadzając odpowiedni stan odniesienia.

Bazując na tych rozważaniach, przez analogię można zapisać nową postać kryterium pękania (10), w którym stan odniesienia będzie się charakteryzował wartością parametru  $Q_m \neq 0$ .

$$J_C = J_{IC} \cdot \left[ \frac{\sigma_c - \sigma_0 \cdot \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_0} - \frac{\sigma_{m_{pso}}}{\sigma_0} \right)}{\sigma_c - \sigma_0 \cdot \left( \frac{\sigma_{m_{ref}}}{\sigma_0} - \frac{\sigma_{m_{pso}}}{\sigma_0} \right)} \right]^{n+1} \quad (11)$$

Przedstawione w pracy [21] wyniki w postaci zmian wartości parametru  $\sigma_m/\sigma_0$  mogą ułatwić korzystanie z kryteriów pękania (10) i (11). Na rys. 2 zaprezentowano wpływ różnych parametrów na rzeczywistą odporność na pękanie  $J_C$ , które zostały wykorzystane w propozycji kryterium (11). Im większy jest poziom naprężeń średnich  $\sigma_m/\sigma_0$ , tym mniejsza wartość rzeczywistej odporności na pękanie  $J_C$ , która maleje również ze wzrostem poziomu naprężeń krytycznych  $\sigma_c$ .

**Dwuparametryczne kryterium pękania  $J = J(J_{IC}, \sigma_m/\sigma_{eff})$**

W 1995 r. Guo Wanlin [14] przedstawił następujące kryterium pękania:

$$J_C \cdot F \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_{eff}} \right) = \text{const} \quad (12)$$

przy czym w postaci funkcji  $F \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_{eff}} \right)$  wpływ więzów w kierunku grubości uwzględnia się za pomocą współczynnika trójosiowości naprężeń:

$$F \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_{eff}} \right) = \frac{2}{3} (1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_{eff}} \right)^2 \quad (13)$$

gdzie:  $\nu$  – współczynnik Poissona.

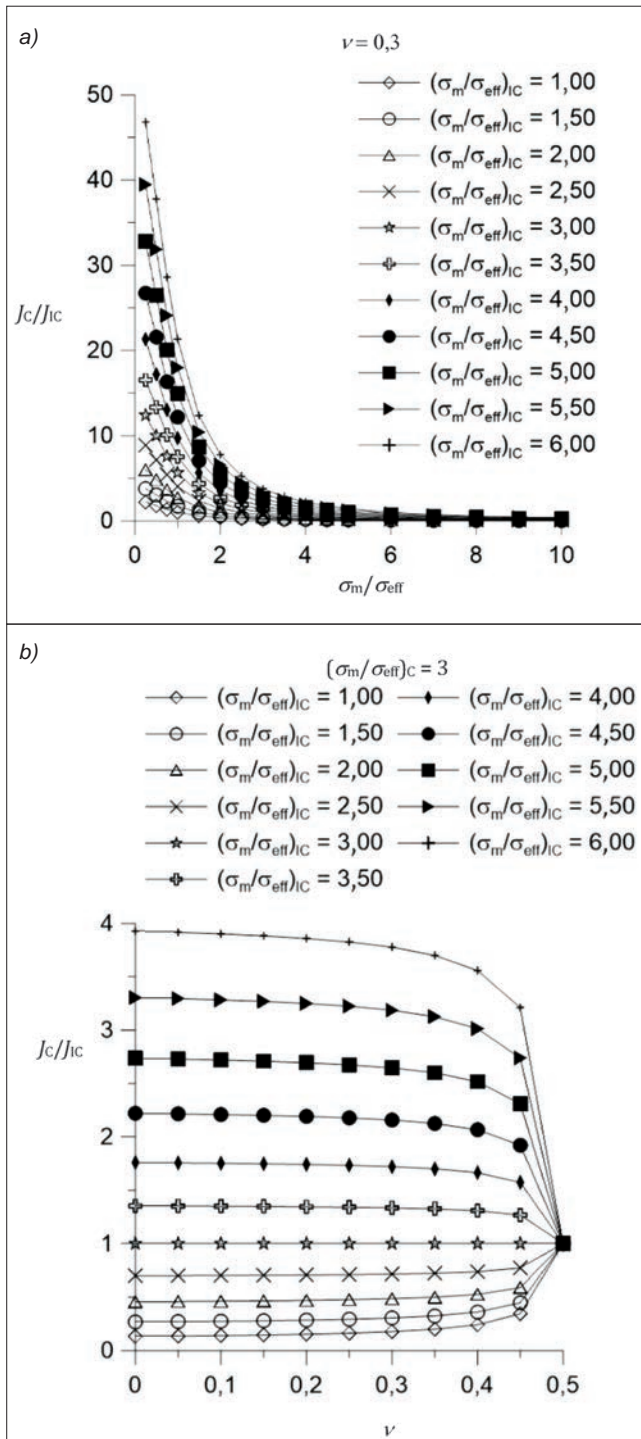
Bazując na wzorze (12), można postulować, aby rzeczywistą odporność na pękanie  $J_C$  obliczyć jako:

$$J_C = J_{IC} \cdot \left[ \frac{\frac{2}{3} (1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_{eff}} \right)_{IC}^2}{\frac{2}{3} (1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_{eff}} \right)_C^2} \right] \quad (14)$$

gdzie indeksy dolne oznaczają:  $IC$  – że wartość całki  $J$  lub ilorazu  $\sigma_m/\sigma_{eff}$  wyznaczono dla próbki, dla której

zgodnie z normą określono krytyczną odporność na pękanie  $J_{IC}$ ;  $C$  – że wartość całki  $J$  lub ilorazu  $\sigma_m/\sigma_{eff}$  odnosi się do próbki, dla której poszukiwana jest rzeczywista odporność na pękanie  $J_C$ .

Podane w [21] zestawienia wyników obliczeń numerycznych w postaci zmian wartości parametru  $\sigma_m/\sigma_{eff}$  mogą ułatwić korzystanie z kryterium pękania (14). Na rys. 3 przedstawiono wpływ wybranych parametrów na wartość rzeczywistej odporności na pękanie. Im większa wartość ilorazu  $\sigma_m/\sigma_{eff}$ , tym mniejsza wartość rzeczywistej odporności na pękanie  $J_C$ , która maleje wraz ze wzrostem współczynnika Poissona, o ile iloraz  $\sigma_m/\sigma_{eff} < 3$ .



Rys. 3. Wpływ parametrów składowych kryterium pękania opisanego wzorem (14) na rzeczywistą odporność na pękanie: a) wpływ ilorazu  $\sigma_m/\sigma_{eff}$  dla ustalonych wartości  $(\sigma_m/\sigma_{eff})_{IC}$ ; b) wpływ współczynnika Poissona dla ustalonych wartości  $(\sigma_m/\sigma_{eff})_{IC}$ .

## Dwuparametryczne kryterium pękania $J = J(J_{IC}, d_n)$

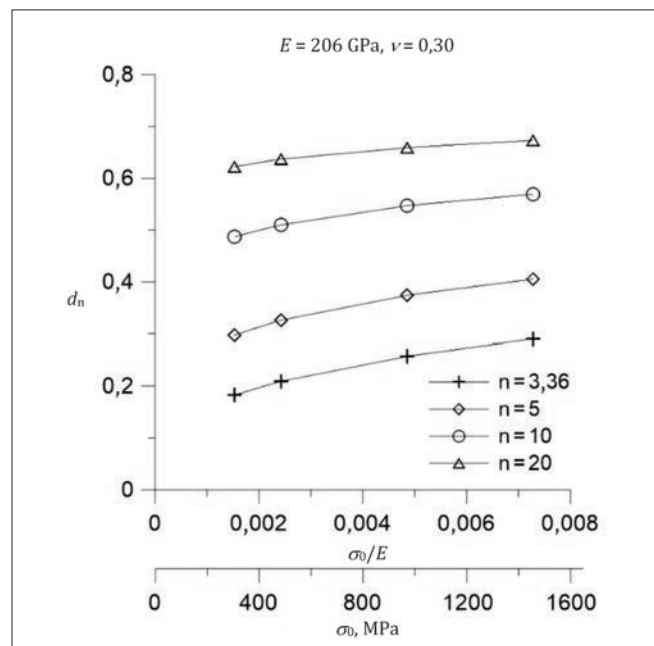
Przedstawione wcześniej propozycje kryterium pękania są odpowiednie dla materiałów charakteryzujących się kruchym mechanizmem pękania, gdy proces pękania rozpoczyna się po osiągnięciu przez naprężenia wartości krytycznej  $\sigma_c$  w odległości krytycznej od wierzchołka pęknięcia  $r_c$ . W przypadku rozważań dotyczących procesu pękania materiałów ciągliwych wygodnym parametrem wydaje się rozwarcie wierzchołka pęknięcia [7]. W 1995 r. O'Dowd [8] wspomniał o kryterium pękania opartym na tej właśnie wielkości. Założył on, że pęknięcie nastąpi, jeżeli rozwarcie wierzchołka pęknięcia osiągnie wartość krytyczną  $\delta_c$ . W 1981 r. Shih związał rozwarcie powierzchni wierzchołka pęknięcia  $\delta_T$  z wartością całki  $J$ :

$$\delta_T = d_n \cdot J \quad (15)$$

gdzie:  $d_n$  – współczynnik wyznaczany dla określonego ilorazu granicy plastyczności  $\sigma_0/E$ , wykładnika umocnienia  $n$ , a także dla p.s.n. (płaskiego stanu naprężenia) lub p.s.o.

Współczynnik  $d_n$  wyznacza się przy okazji określania parametrów funkcji z tyldą „~” w trakcie rozwiązywania równania różniczkowego IV stopnia w ramach analizy problemu HRR. Tę funkcję można oszacować z wykorzystaniem programu komputerowego wskazanego w pracach [13, 17]. Guo Wanlin [14] wartość funkcji uzależnił dodatkowo od współczynnika trójosiowości naprężeń  $T_z$  – wspomniany program wyznacza wartość współczynnika  $d_n$  również dla takiego podejścia. Na rys. 4 zaprezentowano zmiany wartości współczynnika  $d_n$  w funkcji ilorazu granicy plastyczności i modułu Younga dla czterech wartości wykładnika umocnienia w prawie Ramberga-Osgoda przy założeniu p.s.o. [24].

Przeprowadzone badania numeryczne wskazują jednak, że wartość współczynnika  $d_n$  zależy nie tylko od materiału, lecz także od geometrii próbki (rys. 5a). W pracy [24] udowodniono zależność współczynnika  $d_n$  od naprężeń  $Q$  w przypadku belki SEN(B) zdominowanej przez



Rys. 4. Wartości współczynnika  $d_n$  (15) dla różnych wykładników umocnienia i granic plastyczności [24]

p.s.o., a także zależność tego współczynnika od poziomu obciążenia zewnętrznego [24]. Jak można zauważyć, po przekroczeniu określonego poziomu obciążenia zewnętrznego wartość współczynnika  $d_n$  osiąga poziom nasycenia i nie zmienia się z rosnącym dalej obciążeniem zewnętrznym (rys. 5b) [24].

Dla przypadku dominacji p.s.o. zaproponowaną przez O'Dowda hipotezę pęknięcia dla próbki normatywnej o względnej długości pęknięcia  $a/W = 0,5$  można przedstawić jako:

$$\delta_c = d_n^{IC}(n, \sigma_0/E, a/W) \cdot J_{IC} \quad (16)$$

Z kolei dla dowolnej próbki niespełniającej wymogów normatywnych, ale wykonanej z tego samego materiału, można zapisać, że:

$$\delta_c = d_n^C(n, \sigma_0/E, a/W) \cdot J_C \quad (17)$$

Kombinacja obu wzorów prowadzi do sformułowania kryterium pęknięcia w postaci:

$$J_C = J_{IC} \cdot \frac{d_n^{IC}(n, \sigma_0/E, a/W)}{d_n^C(n, \sigma_0/E, a/W)} \quad (18)$$

gdzie:  $d_n^{IC}$  – wartość współczynnika  $d_n$  dla próbki, dla której w warunkach laboratoryjnych określono krytyczną odporność na pęknięcie  $J_{IC}$ ;  $d_n^C$  – wartość współczynnika  $d_n$  dla próbki, dla której poszukuje się rzeczywistej odporności na pęknięcie  $J_C$ .

Wykorzystanie kryterium pęknięcia (18) wymaga przede wszystkim znajomości odporności na pęknięcie w p.s.o. –  $J_{IC}$ , ale także wartości współczynników  $d_n^{IC}$  oraz  $d_n^C$ . W pracy [24] oszacowano, na podstawie obliczeń numerycznych, wartości współczynnika  $d_n = f(n, \sigma_0/E, a/W)$ , a uzyskane rezultaty poddano aproksymacji, aby ułatwić ewentualne analizy inżynierskie.

Wzór (19) pozwala na oszacowanie wartości współczynnika  $d_n$  pod warunkiem, że znane są charakterystyka materiału (granica plastyczności  $\sigma_0$ , wykładnik umocnienia  $n$ ) oraz względna długość pęknięcia [24]:

$$d_n(n, \sigma_0/E, a/W) = a_1 + b_1 \cdot \ln(\sigma_0/E) + c_1 \cdot (n)^{d_1} \quad (19)$$

gdzie:  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  i  $d_1$  – współczynniki będące funkcjami względnej długości pęknięcia  $a/W$ , które można oszacować jako [24]:

$$a_1(a/W) = -5,6957 \cdot (a/W)^3 + 8,551 \cdot (a/W)^2 + -4,241 \cdot (a/W) + 1,5734$$

$$b_1(a/W) = 0,011 \cdot (a/W)^3 + 0,0191 \cdot (a/W)^2 + -0,0508 \cdot (a/W) + 0,0652 \quad (20)$$

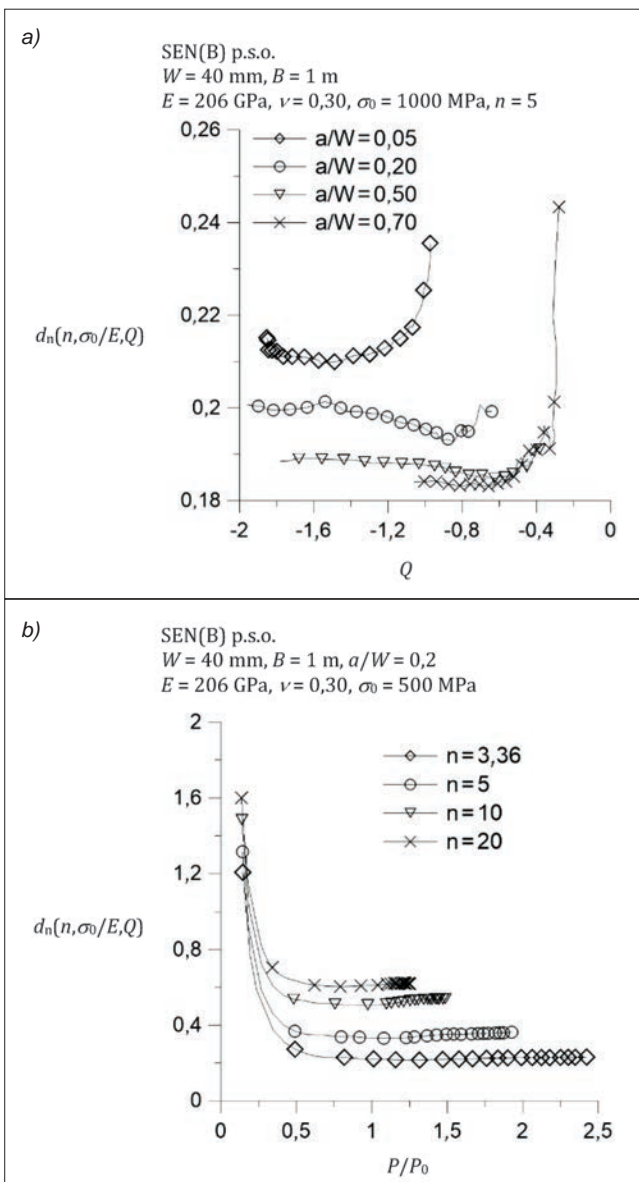
$$c_1(a/W) = -8,2892 \cdot (a/W)^3 + 10,394 \cdot (a/W)^2 + -3,2233 \cdot (a/W) - 1,242$$

$$\begin{cases} d_1(a/W) = -3,3333 \cdot (a/W) + \\ -0,3333 & \text{dla } a/W = \{0,05; 0,20\} \\ d_1(a/W) = -1 & \text{dla } a/W = \{0,20; 0,70\} \end{cases}$$

Zaprezentowany sposób analizy nie jest w zasadzie ani odkrywczy, ani nowy, jednak czasami podczas oceny odporności na pęknięcie pomija się kryterium pęknięcia podane w 1995 r. przez O'Dowda [8], głównie z powodu trudności z określeniem różnych parametrów. Kryterium jest bardzo oczywiste i łatwe w zastosowaniu, jeżeli zna się wartości współczynnika  $d_n$  [24]. Wykorzystanie kryterium (18) prowadzi do uzyskiwania bezpiecznych rezultatów (o czym O'Dowd wspominał już w 1995 r.). To kryterium było rozwijane przez autorów pracy [25], w której zaprezentowano sposób uwzględniania więzów geometrycznych w przypadku określania rzeczywistej odporności na pęknięcie.

## Podsumowanie i wnioski

W artykule zaprezentowano krótki przegląd wybranych kryteriów pęknięcia materiałów sprężysto-plastycznych. Niektóre z przedstawionych wzorów – (1), (12) i (18) – opublikowano w pracach [15, 14, 8]. Pozostałe powstały w wyniku trywialnej analizy prowadzonej na bazie pomysłu O'Dowda z 1995 r. [8]. Wydawać się może, że przedstawione kryteria pęknięcia są proste, jednak – jak pokazano w pracach [15, 19] – nieskomplikowane rozwiązania mogą prowadzić do poprawnych, a przede wszystkim bezpiecznych rezultatów, jakich oczekuje się w przypadku oceny wytrzymałości konstrukcji zawierającej defekty.



Rys. 5. Wpływ: a) względnej długości pęknięcia  $a/W$  na wartość współczynnika  $d_n(n, \sigma_0/E, Q)$  w funkcji poziomu więzów płaskich wyrażonych naprężeniami  $Q$  [24]; b) wykładnika potęgowego  $n$  w prawie Ramberga-Osgooda na wartość współczynnika  $d_n(n, \sigma_0/E, Q)$  w funkcji obciążenia zewnętrznego  $P$  normalizowanego przez obciążenie graniczne  $P_0$  [24]

Bazując na przedstawionych wiadomościach, czytelnik może indywidualnie wyprowadzić zaproponowane w pracy kryteria pęknięcia oraz ocenić – na podstawie zamieszczonych rysunków – w jaki sposób odporność na pęknięcie zmienia się wraz ze zmianą więzów geometrycznych (wyrażonych za pomocą różnych parametrów) czy stanów odniesienia.

Mimo że kryteriom pęknięcia poświęcono wiele prac [6–8, 14, 15, 18, 19, 22, 25], temat oceny rzeczywistej odporności na pęknięcie wciąż pozostaje otwarty, zwłaszcza w zakresie poszukiwania nowych, a przede wszystkim nieskomplikowanych rozwiązań.

**Pracę wykonano w ramach prac statutowych o numerze wewnętrznym 01.0.09.00/2.01.01.01.0027 MNSP. MKTM.17.002, realizowanych na Wydziale Mechatroniki i Budowy Maszyn Politechniki Świętokrzyskiej.**

#### LITERATURA

- Kumar V., German M.D., Shih C.F. "An engineering approach for elastic-plastic fracture analysis". Electric Power Research Institute, Inc. Palo Alto, CA 1981, EPRI Report NP-1931.
- SINTAP: Structural Integrity Assessment Procedures for European Industry. Final Procedure. Brite-Euram Project No. BE95-1426. Rotherham: British Steel, 1999.
- FITNET Report (European Fitness-for-service Network). Edited by M. Kocak, S. Webster, J.J. Janosch, R.A. Ainsworth, R. Koers. Contract No. G1RT-CT-2001-05071, 2006.
- Hutchinson J.W. "Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 16 (1968): s. 13–31.
- Rice J.R., Rosengren G.F. "Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 16 (1968): s. 1–12.
- Neimitz A. „Ocena wytrzymałości elementów konstrukcyjnych zawierających pęknięcia (podstawowe elementy procedur SINTAP)”. Kielce: Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, 2004.
- Neimitz A., Dzioba I., Graba M., Okrajni J. „Ocena wytrzymałości, trwałości i bezpieczeństwa pracy elementów konstrukcyjnych zawierających defekty”. Podręcznik akademicki. Kielce: Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, 2008.
- O'Dowd N.P. "Application of two-parameter approaches in elastic-plastic fracture mechanics". *Engineering Fracture Mechanics*. 52, 3 (1995): s. 445–465.
- Guo W. "Elastoplastic three dimensional crack border field – I. Singular structure of the field". *Engineering Fracture Mechanics*. 46, 1 (1993): s. 93–104.
- Henry B.S., Luxmoore A.R. "The stress triaxiality constraint and the q-value as a ductile fracture parameter". *Engineering Fracture Mechanics*. 57, 4 (1997): s. 375–390.
- Neimitz A., Graba M. "Analytical-numerical hybrid method to determine the stress field in front of the crack in 3D elastic-plastic structural elements". *Materiały XVII ECF*. Brno (Czechy), wrzesień 2008 r., s. 85.
- Neimitz A., Graba M. "In and out-of-plane constraint measures. Uniform description". *Materiały ICF 12 – 12th International Conference on Fracture*. Ottawa (Kanada), 12–17 lipca 2009 r.
- Graba M. "Numerical analysis of the mechanical fields near the crack tip in the elastic-plastic materials. 3D problems". PhD dissertation. Kielce: Kielce University of Technology, Faculty of Mechatronics and Machine Building, 2009.
- Guo Wanlin. "Elastoplastic three dimensional crack border field – III. Fracture parameters". *Engineering Fracture Mechanics*. 51, 1 (1995): s. 51–71.
- Graba M. „Propozycja trójparametrycznego kryterium pęknięcia materiałów kruchych”. *Przegląd Mechaniczny*. 2 (2012): s. 24–31.
- ASTM. ASTM E 1820-05 Standard Test Method for Measurement of Fracture Toughness. American Society for Testing and Materials, 2005.
- Galkiewicz J., Graba M. "Algorithm for determination  $\hat{\sigma}_{ij}(n, \theta)$ ,  $\hat{\epsilon}_{ij}(n, \theta)$ ,  $d_n(n, \theta)$  and  $I_n(n)$  functions in Hutchinson-Rice-Rosengren solution and its 3D generalization". *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 44, 1 (2006): s. 19–30.
- Ritchie R.O., Knott J.F., Rice J.R. "On the relationship between critical tensile stress and fracture toughness in mild steel". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 21 (1973): s. 395–410.
- Neimitz A., Dzioba I., Molasy R., Graba M. „Wpływ więzów na odporność na pęknięcie materiałów kruchych”. *Materiały XX Sympozjum Zmęczenia i Mechaniki Pęknięcia*. Bydgoszcz-Pieczyska, 27–30 kwietnia 2004 r., s. 265–272.
- Chao Y.J., Zhu X.K., Kim Y., Lar P.S., Pechersky M.J., Morgan M.J. "Characterization of crack-tip field and constraint for bending specimens under large-scale yielding". *International Journal of Fracture*. 127 (2004): s. 283–302.
- Raport merytoryczny przygotowany w ramach projektu badawczego IP2012011872 pt. „Katalog parametrów charakteryzujących więzy geometryczne przed frontem szczeliny w materiałach sprężysto-plastycznych. Numeryczna analiza pól mechanicznych – zagadnienia dwu- i trójwymiarowe”. Kielce 2016.
- Neimitz A., Graba M., Galkiewicz J. "An alternative formulation of the Ritchie-Knott-Rice local fracture criterion". *Engineering Fracture Mechanics*. 74 (2007): s. 1308–1322.
- Shih C.F. "Relationship between the J-integral and the crack opening displacement for stationary and extending cracks". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 29 (1981): s. 305–329.
- Graba M. "Numerical analysis of the influence of in-plane constraints on the crack tip opening displacement for SEN(B) specimens under predominantly plane strain conditions". *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 21, 4 (2016): s. 849–866 (<https://doi.org/10.1515/ijame-2016-0050>).
- Neimitz A., Galkiewicz J. "Fracture toughness of structural components: influence of constraint". *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 83 (2006): s. 42–54. ■