

**I Krajowa Konferencja Naukowa**  
**Szybkie prototypowanie**  
**Modelowanie - Wytwarzanie - Pomiary**  
 Rzeszów - Pstrągowa, 16 - 18 września 2015



Organizatorzy:



CENTRUM NAUKOWO TECHNICZNE

KLASTER SZYBKIEGO PROTOTYPOWANIA  
RAPIDROM

## Analiza porównawcza metod tworzenia zarysu zęba w procesie wygładzania powierzchni w wybranych systemach CAD

### Comparative analysis of methods of creating smooth tooth profile in selected CAD systems

JADWIGA PISULA  
BARTŁOMIEJ SOBOLEWSKI\*

DOI:10.17814/mechanik.2015.12.579

W artykule przedstawiono sposób generowania profili wrębu koła stożkowego o kołowej linii zęba otrzymanego na drodze symulacji obróbki. Przedstawiono metody pozyskiwania punktów należących do profilu. Profile zostały wykonane z zastosowaniem krzywych przestrzennych spline w programach Autodesk Inventor oraz Catia V5. Otrzymane profile porównano pod kątem dokładności odwzorowania zarysu zęba.

**SŁOWA KLUCZOWE:** model koła stożkowego o kołowej linii zęba, symulacja obróbki, dokładność odwzorowania krzywych

*The paper presents a method of generating a gap profiles of spiral bevel gear received by the cutting simulation process in CAD systems. This paper provides methods for obtaining points belonging to the profile. Profiles were manufactured using spatial curves spline in Autodesk Inventor and Catia V5. Obtained profiles were compared for accuracy of mapping tooth profile.*

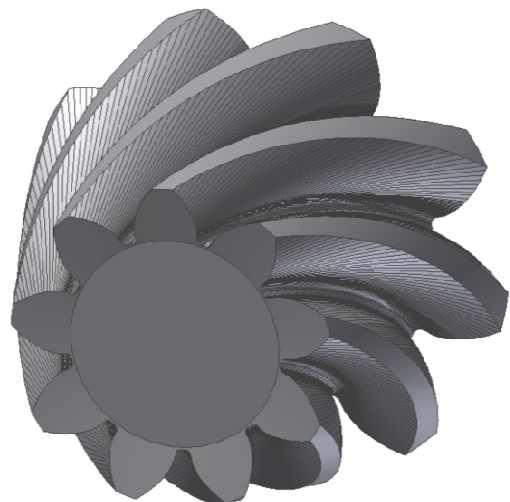
**KEYWORDS:** model of spiral bevel gear, cutting simulation, the accuracy of the mapping curves

#### 1. Wprowadzenie

Modele brytowe kół zębatych wykonywane metodą symulacji obróbki w systemach CAD charakteryzują się występowaniem na powierzchniach wrębów graniastości powierzchni (rys. 1.1) [7, 10]. W przypadku rzeczywistego wykonywania kół zębatych na obrabiarce graniastość ta również występuje (rys. 1.2), jednakże ulega ona usunięciu

w trakcie docierania i pracy przekładni.

Występowanie tego zjawiska jest następstwem iteracyjnego prowadzenia symulacji i bezpośrednio zależy od przyjętego kroku dyskretyzacji. Wraz ze wzrostem ilości przyjętych kroków zwiększa się liczba występujących mikropowierzchni, maleje natomiast ich pole powierzchni. Utworzenie gładkiej powierzchni zęba oraz dna wrębu dokładnie odwzorowującej kształt jest kluczowym elementem w budowie modeli hybrydowych, wykorzystywanych do późniejszych analiz statycznych i z zastosowaniem MES [1, 9].



Rys. 1.1. Graniastość powierzchni na modelu brytowym 3D-CAD otrzymanym na drodze symulacji obróbki

\* Dr inż. Jadwiga Pisula (jpisula@prz.edu.pl), dr inż. Bartłomiej Sobolewski (b\_sobolewski@prz.edu.pl)



Rys. 1.2. Graniastość powierzchni na zębniku przekładni stożkowej

W przypadku modelowania powierzchni współpracujących zębów kół zębatych ich profile wyznacza się w oparciu o wyznaczone punkty. Poszczególne profile rysowane są w tzw. szkicowniku programowym, a otrzymanie dokładnego ich kształtu wymaga zastosowania najdokładniejszych i najbardziej zaawansowanych krzywych typu B-sklejanych lub NURBS [2][4].

Analiza podstawowych krzywych parametrycznych jest podstawą do przedstawienia charakterystyki powierzchni parametrycznych stosowanych w systemach CAD.

## 2. Modelowanie krzywych w CAD

Modelowanie powierzchni bocznej kół przekładni stożkowej wymaga stosowania krzywych gładkich. Dlatego wykorzystuje się funkcje wyższego stopnia niż funkcje liniowe. Funkcje te aproksymują pożądane kształty i jednocześnie potrzebują mniej pamięci, stąd są łatwiejsze przy pracy interakcyjnej niż funkcje liniowe.

Aproksymacje wyższego stopnia mogą być oparte na jednej z trzech metod: funkcjami bezpośrednimi, funkcjami uwikłanymi oraz za pomocą parametrycznej reprezentacji krzywych. Pierwsze dwie metody często nie pozwalają na poprawne odwzorowanie zadanego kształtu, dlatego w systemach CAD stosowana jest parametryczna reprezentacja krzywych.

Krzywa w systemach CAD jest aproksymowana krzywą lub fragmentami krzywych. Każdy segment  $Q$  całej krzywej opisany jest trzema funkcjami  $x$ ,  $y$  i  $z$  w postaci  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , będącymi najczęściej wielomianami trzeciego stopnia parametru  $t$ . Wielomiany niższego stopnia są zbyt mało elastyczne pod względem sterowania kształtem krzywej. Wielomiany wyższego stopnia wymagają większej ilości obliczeń oraz mogą powodować niekontrolowane oscylacje [5][4]. Krzywe parametryczne trzeciego stopnia są jednocześnie krzywymi najniższego stopnia nie należącymi w jednej płaszczyźnie przestrzeni trójwymiarowej.

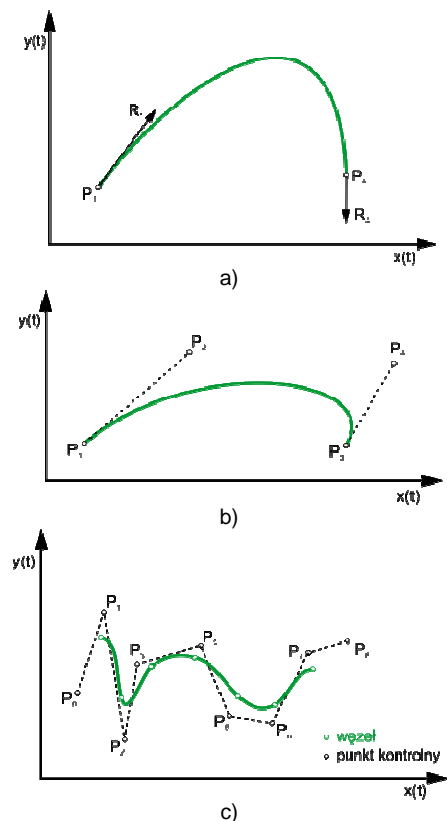
Analizując właściwości krzywych parametrycznych należy zwrócić szczególną uwagę na ciągłość między segmentami krzywej. Krzywa posiada ciągłość geometryczną  $G^0$ , jeżeli dwa jej segmenty tylko łączą się ze sobą. W przypadku, kiedy kierunki dwóch wektorów stycznych segmentów są takie same w punkcie połączenia, to krzywa posiada ciągłość geometryczną  $G^1$ . Ciągłość  $G^1$  oznacza, że geometryczne nachylenia segmentów są równe w punkcie połączenia.

Jeżeli wektory styczne dwóch segmentów krzywej trzeciego stopnia są równe (posiadają równe kierunki i długości) w punkcie połączenia, to krzywa posiada ciągłość pierwszego stopnia ze względu na parametr  $t$  tzw. ciągłość parametryczną  $C^1$ .

Ogólnie ciągłość parametryczna  $C^1$  implikuje ciągłość geometryczną  $G^1$ , jednak stwierdzenie odwrotnie nie jest zawsze prawdziwe. Z tego wynika, że ciągłość  $G^1$  jest mniej restrykcyjnym warunkiem niż ciągłość  $C^1$ , dlatego korzystniejsza jest ciągłość  $G^1$  przy tym nie jest konieczna ciągłość  $C^1$ . Przy czym punkty połączenia dla ciągłości  $G^1$  wyglądają tak samo gładko, jak te z ciągłością  $C^1$ .

Do głównych rodzajów krzywych wykorzystywanych w systemach CAD do modelowania elementów o złożonych kształtach należą: krzywe Hermite'a, krzywe Béziera, krzywe B-sklejane.

Segment krzywej trzeciego stopnia w postaci Hermite'a określany jest przez ograniczenia takie jak: punkty końcowe  $P_1$  i  $P_4$  oraz wektory styczne w punktach końcowych  $R_1$  i  $R_4$  (rys. 2.1a) [6]. W systemach komputerowego wspomaganie projektowania użytkownik posiada możliwość kształtowania krzywej przez zmianę punktów końcowych (granicznych) oraz parametrów wektorów stycznych.



Rys. 2.1. Wybrane krzywe parametryczne; a) krzywa Hermite'a ( $R_1$ ,  $R_4$  – wektory styczne,  $P_1$ ,  $P_4$  – punkty węzłowe), b) krzywa Béziera ( $P_1$ ,  $P_4$  – punkty węzłowe,  $P_2$ ,  $P_3$  – punkty kontrolne (sterujące)), c) krzywa typu B-spline

Dla krzywych Béziera wektory styczne w punktach końcowych  $P_1$ ,  $P_4$  (punkty węzłowe należące do krzywej) są określone w sposób bezpośredni przez dwa punkty pośrednie nienależące do krzywej  $P_2$ ,  $P_3$  (punkty kontrolne – sterujące kształtem krzywej). Krzywa Béziera interpoluje dwa punkty kontrolne i aproksymuje punkty węzłowe (rys. 2.1b) [6]. Krzywe i powierzchnie Béziera posiadają wady, do których należą:

- brak możliwości wprowadzania lokalnych zmian – zmiana położenia punktów kontrolnych powoduje zmianę całej krzywej,
- skomplikowane obliczenia dla złożonych kształtów i wysokich stopni krzywej,
- zafalowania powierzchni dla wysokich stopni krzywej.

Przedstawione powyżej wady krzywych Béziera powodują potrzebę stosowania w modelowaniu CAD krzywych, które dokładniej odwzorowują skomplikowane kształty projektowanych elementów.

Do takich należą interpolacyjne krzywe sklejane o klasie ciągłości  $C^2$ , złożone z kawałków wielomianu trzeciego stopnia [3]. Wielomian tego typu posiada jeden stopień ciągłości więcej niż postacie Hermite'a i Béziera. Pozwala na zachowanie łagodniejszych przejść pomiędzy nimi niż dla krzywych Hermite'a i Béziera.

Do krzywych sklejanych można zaliczyć krzywe typu B (B-spline) składające się z segmentów, których współczynniki wielomianów zależą od kilku punktów kontrolnych. Kształt takiej krzywej określany jest przez sterowanie lokalne, tzn. przesuwanie punktu kontrolnego i wpływa tylko na niewielki odcinek krzywej.

Charakterystyczne właściwości krzywych B-sklejanych:

- krzywe opisane wielomianem drugiego stopnia są płaskie,
- zmiana współrzędnych punktu kontrolnego powoduje tylko lokalną zmianę kształtu krzywej,
- można osiągnąć ciągłość drugiego rzędu (co wiąże się z ciągłością krzywizny) w punkcie wspólnym dwóch łuków opisanych różnymi wielomianami, których minimalny stopień wynosi 3,
- kubiczne interpolacyjne krzywe sklejane, w odróżnieniu od krzywych wielomianowych wysokiego stopnia pozwalają na dobre odzwierciedlenie kształtu pomiędzy danymi punktami,
- rzadko zachodzi rzeczywista potrzeba sięgania po krzywe o większej regularności.

Krzywe B-sklejane jednorodne (węzły są w jednakowych odstępach) pozwalają na modelowanie złożonych kształtów, jednak posiadają nie zawsze wystarczającą kontrolę kształtu profili o bardzo skomplikowanych kształtach. Z tego powodu w systemach CAD bardzo często stosuje się niejednorodne krzywe B-sklejane (przedział parametru pomiędzy kolejnymi wartościami węzłowymi nie musi być równomierny).

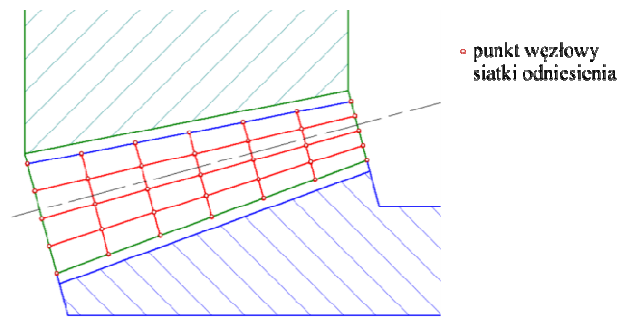
Jedną z odmian niejednorodnych krzywych B-sklejanych są krzywe typu NURBS (ang. Non-Uniform Rational B-Spline - NURBS). Krzywa typu NURBS tworzy gładką krzywą między punktami sterującymi (węzłami). Krzywe NURBS różnią się od zwykłych B-sklejanych wprowadzeniem wag dla punktów węzłowych [8]. Krzywe tego typu przydatne są przy tworzeniu nieregularnych kształtów, m.in. krzywych stożkowych, krzywych wielomianowych, prostych oraz krzywych z ostrzami. Dlatego też mają powszechnie zastosowanie w systemach CAD.

Zastosowanie poszczególnych rodzajów krzywych w systemach komputerowego projektowania jest zależne od zakładanej dokładności profili powierzchni tworzonego elementu.

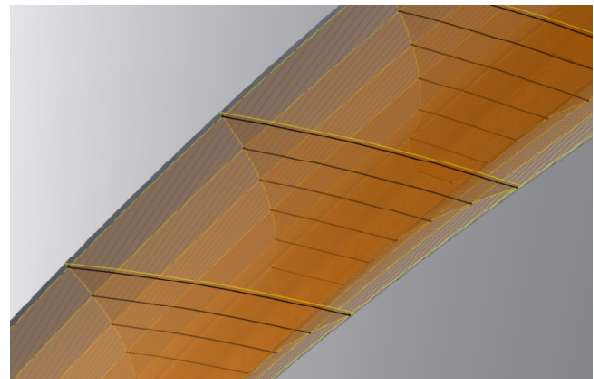
### 3. Generowanie punktów i profili wrębu koła stożkowego o kołowej linii zęba

Punkty na powierzchni wrębu otrzymano za pomocą dwóch metod: z punktów przebicia powierzchni wrębu współosiowymi okręgami przechodzącymi przez węzły siatki

odniesienia oraz poprzez wyznaczenie krawędzi przecięcia powierzchni wrębu. Siatkę odniesienia wykonano na podstawie hipotetycznego obszaru styku (rys. 3.1).



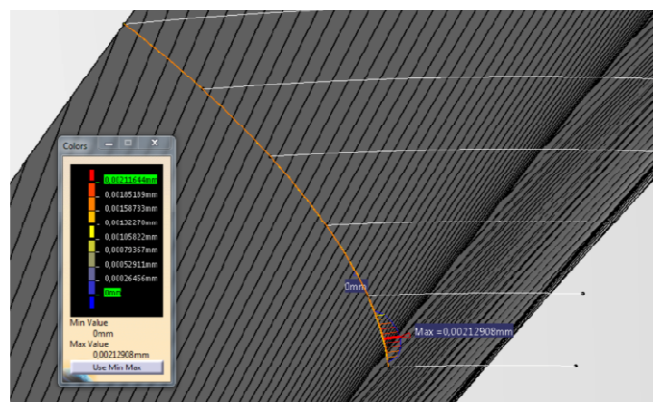
Rys. 3.1. Zdefiniowana siatka odniesienia usytuowana w przekroju osiowym kół



Rys. 3.2. Punkty przebicia powierzchni bocznej wrębu

Otrzymane punkty wykorzystano do utworzenia profili na powierzchniach bocznych wrębu zęba. Profile uzyskiwane są przez połączenie punktów przestrzenną krzywą. Podstawowa metoda tworzenia tego typu krzywych polega na wykorzystaniu poleceń generujących tzw. spline 3D w oparciu o punktu węzłowe. Profile na podstawie wcześniej otrzymanych punktów wygenerowano w systemach Autodesk Inventor oraz CATIA V5.

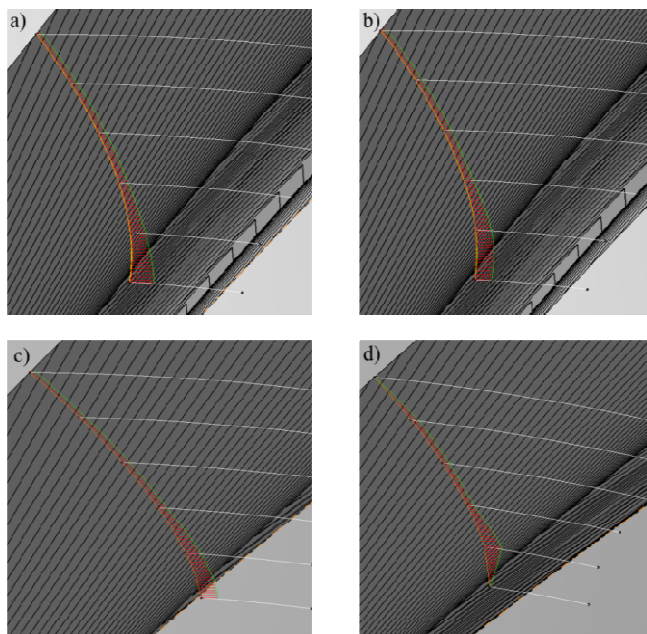
Po wygenerowaniu profili w obu systemach CAD, porównano je ze sobą określając odległości pomiędzy nimi (rys. 3.3). Analiza wykazała, że profile te nie wykazują zgodności jedynie w pobliżu punktów końcowych.



Rys. 3.3. Analiza odległości pomiędzy profilami

Wykonano również i porównano wyniki analiz krzywizn uzyskanych profili (rys. 3.4). Ze względu na, to że w przypadku systemu Autodesk Inventor użytkownik posiada możliwość wyboru jednej z trzech metod dopasowania krzywej:

standardowa, minimalna energia i AutoCAD. Dla każdej z nich uzyskuje się odmienny rozkład krzywizn.



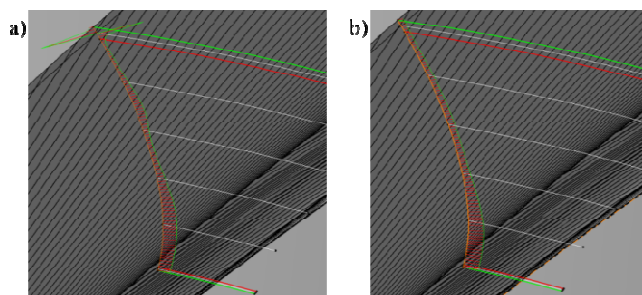
Rys. 3.4. Rozkład krzywizn uzyskany w systemie: a) CATIA, b) Inventor - metoda standard, c) Inventor - metoda minimum energii, d) Inventor metoda AutoCAD

Najbardziej płynny przebieg wykresu uzyskano w przypadku wykorzystania systemu CATIA oraz w systemie Inventor przy metodzie dopasowania minimum energii. Natomiast w przypadku zastosowania metody dopasowania AutoCAD otrzymany wykres charakteryzuje się największą zmiennością.

W przedstawionym przykładzie podczas tworzenia profili nie określono kierunków stycznych do krzywej w punktach końcowych. W przypadku generowania punktów na podstawie modeli brytowych wykonanych metodą symulacji obróbki uzyskuje się je na ograniczonej powierzchni (powierzchni bocznej). Z tego względu wyznaczenie kierunków stycznych w punktach końcowych jest problematyczne. Podjęto próbę zdefiniowania kierunków stycznych w punktach końcowych oraz przebadano wpływ wprowadzonych zmian na rozkład krzywizn. W tym celu zastosowano powiększenie otoczki przedmiotu obrabianego. Użycie otoczki o powiększonym o 5 % boku zęba pozwoliło na wygenerowanie dodatkowych punktów leżących poza obszarem rzeczywistego boku zęba. Utworzenie przedłużonego profilu z wykorzystaniem dodatkowych punktów pozwoliło na uzyskanie po docięciu profilu o określonym kierunku styczności.

W wyniku przeprowadzonej analizy okazało się, że wykorzystanie do definicji profili dodatkowych punktów wpłynęło niekorzystnie na rozkład krzywizn. Zaburzenie rozkładu może wynikać z nierównomiernego rozkładu punktów wzdłuż profilu co z kolei powoduje, że wpływ punktów dodatkowych na krzywą jest zbyt silny.

W związku z wystąpieniem zaburzeń po dodaniu punktów na powiększonej otoczce postanowiono sprawdzić kolejną modyfikację sposobu generowania profilu. Dodano kolejne punkty rozmieszczone symetrycznie względem punktów końcowych, miało to na celu wyeliminowanie negatywnego wpływu punktów dodatkowych przy jednoczesnym zachowaniu określenia kierunku stycznego w punktach końcowych.

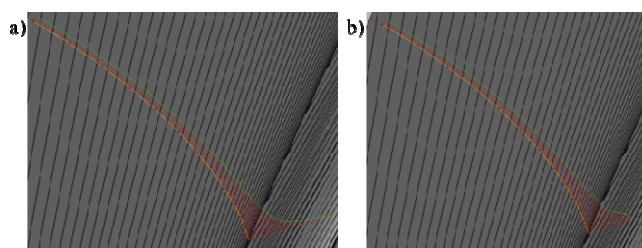


Rys. 3.5. Wyniki analizy krzywizn: a) profil wygenerowany w systemie Inventor, b) profil wygenerowany w systemie CATIA

Po przeanalizowaniu otrzymanych wyników stwierdzono, że rozkład krzywizn nadal posiada niekorzystny rozkład. Zaobserwowano wprawdzie poprawę wyników, ale mimo tego najpłynniejszy przebieg wykresu krzywizn uzyskano w przypadku tworzenia profili wyłącznie w oparciu o punkty leżące na rzeczywistym boku zęba. Przeprowadzone analizy wskazały, iż profile wygenerowane w systemie CATIA charakteryzują się korzystniejszym przebiegiem wykresu krzywizn (rys. 3.5).

Po przeanalizowaniu otrzymanych wyników zauważono że wygenerowane punkty usytuowane są w sposób nierównomierny względem krawędzi mikropowierzchni. W przypadku, kiedy sąsiednie punkty przecięcia nie leżą w ten sam sposób względem krawędzi mikropowierzchni, na wykresie krzywizn pojawia się zafalowanie.

Zaproponowano kolejną metodę generowania punktów i profili. Metoda ta polega na wyznaczeniu krawędzi przecięcia powierzchni wrębu oraz powierzchni stożkowej stworzonej w oparciu o siatkę odniesienia. Następnie po wyznaczeniu krzywej przecięcia, w połowie długości wybranych odcinków krzywej przecięcia wstawiono punkty. Na podstawie otrzymanych punktów wygenerowano profile w systemach CATIA i Inventor. Wykonano analizę krzywizn, której wyniki przedstawiono na rys. 3.6.



Rys. 3.6. Wyniki analizy krzywizn: a) profil wygenerowany w systemie Inventor, b) profil wygenerowany w systemie CATIA

W przypadku generowania punktów węzłowych profili jako środków odcinków krzywej przecięcia uzyskano wykresy krzywizn profili o płynniejszym przebiegu niż w przypadku wcześniej opisywanych metod. Ponadto okazało się że w przypadku metody wykorzystującej krzywą przecięcia płynniejsze wykresy krzywizn profili uzyskano dla krzywych tworzonych w programie Inventor. Natomiast odchyłki maksymalne w stosunku do modelu wygenerowanego w procesie symulacji obróbki wynoszą 0,2  $\mu\text{m}$ .

#### 4. Wnioski

Na podstawie przeprowadzonych analiz warunków geometrycznych profili koniecznych do wygenerowania gładkiej powierzchni zęba koła wyciągnięto następujące wnioski:

1. W przypadku, gdy profil wyznaczany jest z punktów przebiecia powierzchni wrębu współosiowymi okręgami przechodzącymi przez węzły siatki odniesienia, najlepsze odwzorowanie uzyskano krzywą zastosowaną w programie Catia. Dodatkowe definiowanie kierunków stycznych do krzywej w punktach końcowych poprzez powiększenie otoczki koła i uzyskaniu dodatkowych punktów przebiecia, powoduje niekorzystny rozkład krzywizn w obu programach. Zwiększenie ilości punktów z poza podstawowej otoczki koła poprawia wyniki odwzorowania krzywych, ale najpłynniejszy przebieg wykresu krzywizn daje profil otrzymany z punktów leżących na rzeczywistym boku zęba.

2. W metodzie polegającej na wyznaczeniu krawędzi przecięcia na wydłużonej powierzchni wrębu, stanowiącej krzywą łamaną oraz wstawieniu w połowie długości wybranych odcinków krzywej punktów, lepsze odwzorowanie profilu daje krzywa uzyskana w Inventorze wg metody minimum energii.

Przedstawione metody uzyskiwania profili mają podstawową wadę. Utrudniona jej automatyzacja procesu wyznaczania punktów węzłowych profili. Powodowane jest to sposobem definicji przez program poszczególnych odcinków krzywej przecięcia. System do każdego z odcinków przypisuje numer operacji różnicy brył wynikający z procesu symulacji obróbki.

*Badania realizowane w ramach Projektu "Nowoczesne technologie materiałowe stosowane w przemyśle lotniczym", Nr POIG.01.01.02---00--015/08--00 w Programie Operacyjnym Innowacyjna Gospodarka (PO IG). Projekt współfinansowany przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego.*

#### LITERATURA

1. Dziubek Tomasz, Pisula Jadwiga: Analiza dokładności modeli 3D-CAD walcowych kół zębatych otrzymywanych w procesie symulacji obróbki w odniesieniu do parametrycznych modeli powierzchniowych. *Mechanik nr 2/2013* (2013), s.140, pełny referat na CD19, s.1-12.
2. Farin G., Hoschek J., Kim M.-S.: "*Handbook of Computer Aided Geometric Design*". North-Holland: Elsevier, 2002.
3. Hermann Thomas, Peters Jörg, Strotman Tim: "A geometric constraint on curve networks suitable for smooth interpolation". *Computer-Aided Design*. (2011) Volume 43, Issue 7, pp. 741-746.
4. Hosaka Mamoru: "*Modeling of Curves and Surfaces in CAD/CAM*". New York: Springer-Verlag, 1992.
5. Kiciak Przemysław: „*Podstawy modelowania krzywych i powierzchni. Zastosowania w grafice komputerowej*”. Warszawa: WNT, 2005.
6. Lu Xing-Jiang, Zheng Jianmin, Cai Yiyu, Zhao Gang: "Geometric characteristics of a class of cubic curves with rational offsets". *Computer-Aided Design*. (2015), doi:10.1016/j.cad.2015.07.006.
7. Marciniak Adam, Pisula Jadwiga, Sobolewski Bartłomiej: „Modelowanie kół zębatych w środowisku systemowym 3D-CAD”, rozdział 1 Monografii pod red. G. Budzika „*Określenie chwilowego śladu styku przekładni zębatych z zastosowaniem metod szybkiego prototypowania*”, Rzeszów, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, 2011, s. 9-47.

8. Martin William, Cohen Elaine, Fish Russell, Shirley Peter: Practical Ray Tracing of Trimmed NURBS Surfaces, *Journal of Graphics Tools*. (2000) Vol. 5, No. 1, pp. 27-52.
9. Pisula Jadwiga, Sobolewski Bartłomiej: Metoda hybrydowa tworzenia modelu 3D-CAD stożkowego koła zębatego o kołowo-łukowej linii zęba. *Mechanik nr 2/2014* (2014), s.128, pełny tekst CD13, s. 1-7.
10. Siemiński Przemysław, Skawiński Piotr: Parametryczny trójwymiarowy model przekładni stożkowej o krzywoliniowej linii zęba jako wynik symulacji obróbki uzębienia”, Program Priorytetowy NOWE TECHNOLOGIE, *Prace Naukowe*, Politechnika Warszawska, Warszawa (2001), zeszyt 4, str. 181-190.