

Analiza numeryczna płyt z centralną szczeliną poddawanych dwuosiomemu rozciąganiu dla materiałów sprężysto-plastycznych

Numerical analysis of the center cracked square plates in biaxial tension for elastic-plastic materials

MARCIN GRABA *

DOI: 10.17814/mechanik.2016.10.447

Zaprezentowano wybrane wyniki analizy numerycznej płyt CCSP(BT) z centralnym pęknięciem poddawanych dwuosiomemu rozciąganiu. Przedstawiono szczegóły modelu numerycznego, wpływ poziomu dwuosioowości naprężeń rozciągających płytę na wartość całki J oraz rozkład naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia. Analizę prowadzono z założeniem małych i dużych odkształceń.

SŁOWA KLUCZOWE: płyta CCSP(BT), MES, całka J , rozkład naprężeń

Presented are selected results of numerical analysis for CCSP(BT) plates, containing a central crack subjected to biaxial tension. Details of the numerical analysis were presented and the discussion about the impact of the level of biaxial tension ratio on stress field near crack tip was done. The analysis was performed on the assumption of small and large deformations.

KEYWORDS: CCSP(BT) plate, FEM, J-integral, stress field

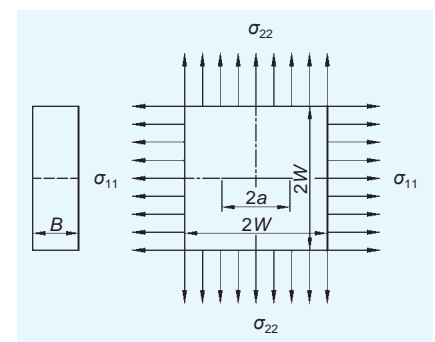
Symbol	Wyjaśnienie
Q	naprężenia Q , określane również mianem parametru Q będącego różnicą pomiędzy rozwiązaniem numerycznym MES a rozwiązaniem HRR, wyznaczaną z reguły dla naprężeń rozciągających powierzchnie szczeliny przy założeniu małych odkształceń
J	całka J , N/m
σ_0	granica plastyczności, MPa
a	długość pęknięcia, m
W	szerokość płyty, m
b	długość niepękniętego odcinka próbki, m
B	grubość płyty, m
a/W	względna długość pęknięcia
E	moduł Younga, GPa
ν	współczynnik Poissona
r_w	promień w wierzchołku pęknięcia, m
x_1, x_2, x_3	współrzędne w kartezjańskim układzie współrzędnych: x_1, x_2 – współrzędne w płaszczyźnie pęknięcia, x_3 – współrzędna w kierunku grubości

Pola naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia w materiałach sprężysto-plastycznych po raz pierwszy były analizowane w 1968 r. [1, 2]. Rozważania te – podsumowane przez McClintoka [3] w postaci rozwiązania HRR (od nazwisk twórców: Hutchinsona, Rice'a i Rosengrena) – stanowiły podstawę wielu prac [4–13], w których poruszano zagadnienia z zakresu sprężysto-plastycznej mechaniki

pęknięcia. Kolejni autorzy rozważali różne geometrie zawierające szczeliny (np. belki, płyty) i zawsze odwoływali się do podstawowego dla mechaniki pęknięcia rozwiązania HRR. Nawet procedury SINTAP [14] i FITNET [15] odnoszą się do niego w rozdziałach poświęconych wyznaczeniu rzeczywistej odporności na pęknięcie, gdy zachodzi potrzeba oszacowania wartości naprężeń Q zdefiniowanych przez O'Dowda [4, 5].

Rozwiązanie HRR [1, 2] podane zostało przez autorów zarówno dla pierwszego, jak i drugiego sposobu obciążenia (*mode I* oraz *mode II*) [16]. W 1974 r. Shih [17] przedstawił kompleksową analizę rozkładów naprężeń dla uplastycznienia bliskiego zasięgu przy płaskim stanie odkształcenia (p.s.o.) w przypadku złożonego stanu obciążenia – *mixed mode*. Jednakże, jak wiadomo z literatury, stan naprężeń w rzeczywistej geometrii – belce czy płycie o ograniczonych wymiarach, określonej szerokości i grubości oraz pęknięciu o danej długości – jest wrażliwy na zmiany tych parametrów. Parametry te wpływają na poziom więzów geometrycznych (więzów płaskich i więzów w kierunku grubości), które trzeba rozumieć jako miarę ograniczeń stawianych przez materiał rozwijającym się odkształceniom plastycznym przed wierzchołkiem pęknięcia wskutek działania obciążenia zewnętrznego [18]. Tematyka więzów była wielokrotnie dyskutowana w literaturze fachowej [4–13], jednak wciąż jest to temat niewyczerpany ze względu na różnorodność geometrii, sposobów obciążenia czy nawet materiałów. O ile wiele prac poświęca się podstawowym elementom konstrukcyjnym [9–13], dyskutowanym w procedurach SINTAP [14] i FITNET [15] – np. płycie z centralną szczeliną poddaną rozciąganiu według pierwszego sposobu obciążenia [12, 13] – to istnieją geometrie, które nie są tak szeroko dyskutowane i analizowane. Takim przykładem jest kwadratowa płyta z centralną szczeliną poddawana dwuosiomemu rozciąganiu (*central cracked square plate in biaxial tension*) – CCSP(BT), rys. 1.

Rys. 1. Płyta kwadratowa z centralną szczeliną poddana dwuosiomemu rozciąganiu: a – długość pęknięcia; W – szerokość próbki; B – grubość próbki; σ_{22} – naprężenia normalne do powierzchni pęknięcia (składowa obciążenia zewnętrznego według pierwszego sposobu obciążenia), oznaczane również jako σ_{zz_ext} ; σ_{11} – naprężenia ścinające powierzchnie pęknięcia (składowa obciążenia zewnętrznego według drugiego sposobu obciążenia), oznaczane również jako σ_{yy_ext}



* Dr inż. Marcin Graba (mgraba@tu.kielce.pl) – Katedra Technologii Mechanicznej i Metrologii, Wydział Mechatroniki i Budowy Maszyn Politechniki Świętokrzyskiej

Geometria ta była omawiana w pracach [19, 20], gdzie dyskutowano o poziomach naprężeniach, a także podano alternatywne rozwiązania na obciążenia graniczne wobec wzorów proponowanych przez Meeka i Ainswortha [21]. Pewne analogie można również znaleźć w pracach [22, 23], gdzie autorzy dyskutują o polach blisko wierzchołka pęknięcia w materiałach sprężysto-plastycznych dla złożonego sposobu obciążenia.

Jak wspomiano, tematyka węzłów, mimo że szeroko dyskutowana, wciąż jest niewyczerpana, dlatego autor zdecydował się poruszyć zagadnienia różnorodnych pól przed wierzchołkiem pęknięcia dla płyty CCSP(BT), koncentrując się na poziomie naprężeniach oraz na poziomie całki J , którą uważa się za parametr kontrolujący proces pęknięcia oraz za amplitudę osoblwych pól naprężeni i odkształceń. Rozważania będą oparte na kompleksowym programie obliczeń numerycznych, wykonywanych metodą elementów skończonych (MES), prowadzonych z wykorzystaniem pakietu ADINA w wersji 8.8 [24, 25].

Geometria, materiał i model numeryczny płyty CCSP(BT)

Analizie numerycznej poddano geometrię płyt CCSP (BT) pokazaną na rys. 1. Przyjęto stałą szerokość płyt $W = 40$ mm. Modelowano płyty zawierające pęknięcia o czterech względnych długościach $a/W = \{0,05; 0,20; 0,50; 0,70\}$. Obliczenia prowadzono przy założeniu płaskiego stanu odkształcenia, co oznaczało, że grubość modelowanej płyty w modelu MES ustalono na $B = 1$ m, zgodnie z zaleceniami autorów pakietu ADINA [24, 25].

Obciążenia płyt CCSP(BT) realizowano przez przyłożenie do dwóch brzegów próbki wzajemnie prostopadłych naprężeń rozciągających σ_{11} , które rozciągają płytę w kierunku propagacji pęknięcia, oraz σ_{22} , które rozcią-

gają płytę w kierunku prostopadłym do powierzchni pęknięcia (kierunek normalny do powierzchni szczeliny). By kompleksowo ocenić poziom naprężeń, testowano siedem wariantów obciążenia zewnętrznego, różniących się wzajemnym udziałem naprężeń rozciągających: $\sigma_{11}/\sigma_{22} = = \sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext} = \{0; 0,25; 0,50; 0,75; 1,00; 1,25; 1,50\}$.

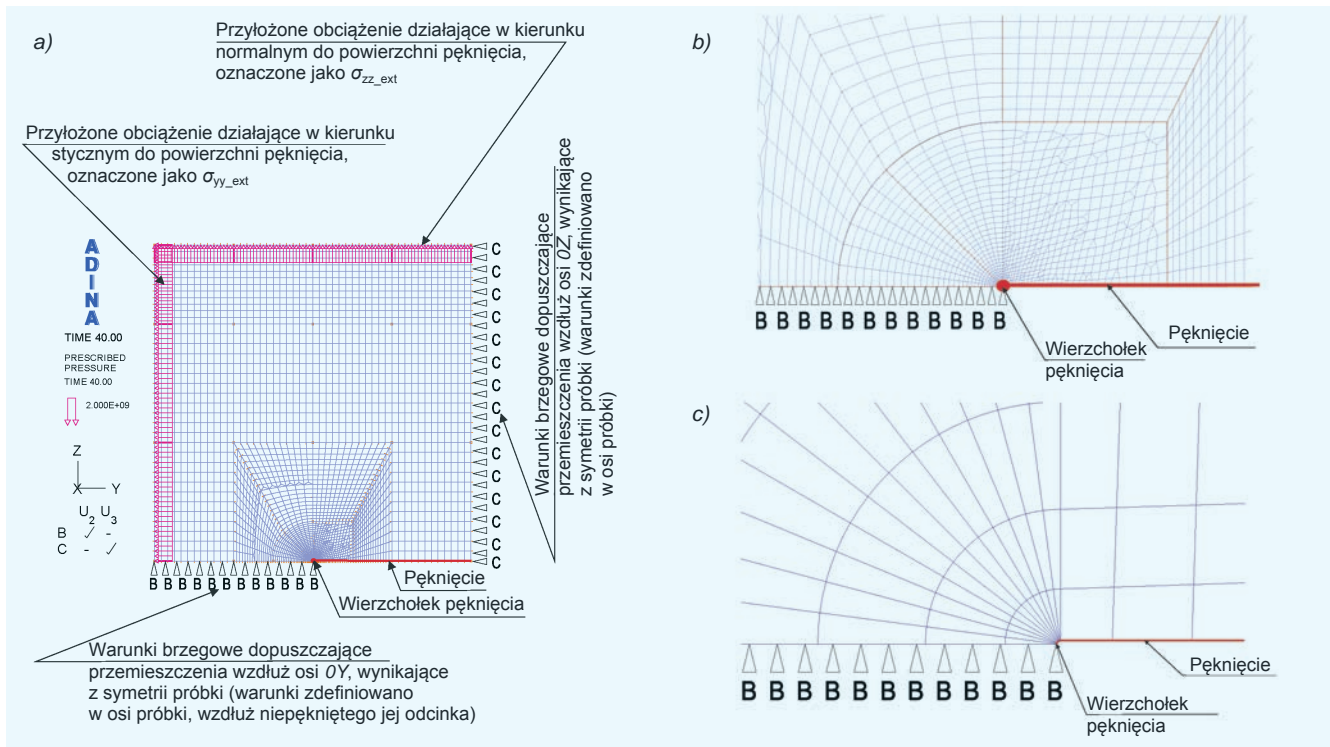
W analizie numerycznej wykorzystano model izotropowy, jednorodny model materiału sprężysto-plastycznego, opisany warunkiem plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego. Związek konstytutywny wykorzystany w analizie miał postać:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \begin{cases} \sigma/\sigma_0 & \text{dla } \sigma \leq \sigma_0 \\ \alpha \cdot (\sigma/\sigma_0)^n & \text{dla } \sigma > \sigma_0 \end{cases} \quad (1)$$

gdzie: σ – naprężenie, ε – odkształcenie, σ_0 – granica plastyczności, ε_0 – odkształcenie odpowiadające granicy plastyczności ($\varepsilon_0 = \sigma_0/E$, gdzie E to moduł Younga), α – stała potęgowa w prawie Ramberga-Osgooda (R-O), n – wykładnik potęgowy w prawie R-O.

Zakładano stałą wartość modułu Younga $E = 206$ GPa, stałą wartość współczynnika Poissona $\nu = 0,3$ oraz wartość stałej potęgowej $\alpha = 1$. By ocenić wpływ stałych materiałowych, w symulacji wykorzystano cztery wartości granicy plastyczności $\sigma_0 = \{315, 500, 1000, 1500\}$ MPa oraz cztery wartości wykładnika umocnienia $n = \{3,36; 5; 10; 20\}$.

Model płyty CCSP(BT) wprowadzany do programu ADINA stworzono zgodnie ze wskazówkami podanymi w pracach [26, 27]. Ze względu na symetrię płyty (wykorzystano dwie osie symetrii), modelowano jedynie jej ćwiartkę, uwzględniając właściwe warunki brzegowe (patrz rys. 2). To podejście pozwala na wykorzystanie większej liczby elementów skończonych (ES) na mniejszym



Rys. 2. Model numeryczny ćwiartki płyty CCSP(BT) wykorzystany w programie badawczym: a) cały model numeryczny; b) obszar przywierzchołkowy; c) siatka elementów skończonych (ES) w bliskim sąsiedztwie wierzchołka pęknięcia; w programie ADINA domyślny układ współrzędnych dla zagadnień płaskich jest orientowany w układzie YOZ , kierunek X w programie ADINA jest uwzględniany w rozwiązywaniu zagadnień 3D przy znanej grubości pęknięcia, zatem Y należy utożsamiać z kierunkiem x_1 równoległym do powierzchni pęknięcia, a Z – z kierunkiem x_2 normalnym do powierzchni pęknięcia

fragmencie próbki, skracza czas analizy numerycznej, a od prowadzącego analizę wymaga zablokowania we właściwym miejscu odpowiednich przemieszczeń w kolejnych węzłach.

Wierzchołek pęknięcia zamodelowano w postaci ćwiartki łuku o promieniu r_w od 1 do 5 μm – wielkość tego promienia była uwarunkowana przyjęciem w analizie małych, względnie dużych odkształceń i zależała od charakterystyki materiałowej (dla materiałów silnie się umacniających można wykorzystać mniejsze promienie zaokrąglenia). W niektórych przypadkach promień wierzchołka pęknięcia był nawet 8000 razy mniejszy od szerokości płyty. Wierzchołek pęknięcia podzielono na 12 części, zagęszczając podział w kierunku osi symetrii płyty. W różnych przypadkach relacja pomiędzy rozmiarem największego i najmniejszego ES w wierzchołku pęknięcia wynosiła 5–20 razy. Obszar przywierzchołkowy o promieniu 1–5 mm podzielono na 36–50 ES, z których z reguły najmniejszy, położony przy wierzchołku pęknięcia, był 20–50 razy mniejszy od ostatniego. Najmniejszy element przywierzchołkowy stanowił ok. 1/3076, względnie 1/10 210 szerokości płyty W , a największy – ok. 1/154 lub 1/204 szerokości płyty. Parametry modelu numerycznego dobierano ściśle w zależności od długości pęknięcia, rodzaju i poziomu obciążenia zewnętrznego oraz charakterystyki materiałowej.

Siatkę ES wypełniono dziewięciowęzłowymi elementami typu 2-D SOLID *plane strain* o interpolacji typu *mixed* z dziewięcioma punktami całkowania numerycznego (PCN). Całkowity model numeryczny – w zależności od rodzaju materiału, długości pęknięcia oraz obciążenia zewnętrznego – składał się z 3149–3428 elementów skończonych zawierających 12803–13921 węzłów. Łącznie w programie badawczym poddano analizie 448 modeli różniących się granicą plastyczności, wykładnikiem umocnienia, względną długością pęknięcia oraz rodzajem obciążenia zewnętrznego. Analizę prowadzono na dwa sposoby – zakładając małe odkształcenia i małe przemieszczenia (warunek konieczny do porównania rozkładów naprężeń z polem HRR, wyznaczenia naprężeń Q i numerycznego oszacowania całki J) oraz duże odkształcenia i duże przemieszczenia (warunek niezbędny do oszacowania maksymalnych naprężeń rozwierających powierzchni pęknięcia, oznaczanych przez $\xi_0 = \sigma_{22_max}/\sigma_0$, i ich znormalizowanego położenia przed wierzchołkiem pęknięcia $\psi_0 = (x_{22_max} \cdot \sigma_0)/J$, gdzie σ_{22_max} to rzeczywista wartość maksymalnych naprężeń rozwierających powierzchni szczeliny wyrażona w MPa i oszacowana MES, a x_{22_max} to fizyczna odległość tego maksimum od wierzchołka pęknięcia).

Wymiar charakterystyczny promienia zaokrąglenia w wierzchołku pęknięcia, wielkość przywierzchołkowych ES, gęstość siatki wokół wierzchołka pęknięcia i jej podział w całym modelu numerycznym wynikały z szeregu testów, które przeprowadził autor pracy, by uzyskać w wybranym modelu numerycznym zbieżność wyników. Testy te ograniczono do analizy p.s.o. przy założeniu dużych odkształceń. Właśnie dla tego typu obliczeń numerycznych rozkłady naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia oraz numerycznie oszacowywana całka J są wrażliwe na parametry modelu numerycznego, co było dyskutowane w pracach [10, 26–27]. Szeroką analizę tego problemu autor przedstawił w [10], gdzie wyciągnął szereg wniosków znajdujących zastosowanie przy prowadzeniu różnorodnych obliczeń numerycznych.

Całkę J wyznaczano zgodnie z koncepcją *virtual shift method*, w której wykorzystuje się wirtualny przyrost dłu-

gości pęknięcia [24, 25]. Zastosowany w analizie kontur całkowania, niezbędny do wyznaczenia całki J , przebiegał stosunkowo daleko od wierzchołka pęknięcia i obejmował swym promieniem co najmniej 30–45 ES. Wyniki uzyskiwane dla kilku konturów całkowania okazywały się zbieżne. Pakiet ADINA [24, 25] pozwala również oszacować całkę J zgodnie z jej definicją:

$$J = \int_C w dx_2 - \mathbf{t} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) ds \quad (2)$$

gdzie: w – gęstość energii odkształcenia, \mathbf{t} – wektor obciążenia związany z wektorem jednostkowym \mathbf{n} , który działa na dowolny kontur C zakreślony wokół wierzchołka szczeliny (\mathbf{n} jest jednostkowym wektorem normalnym do konturu C), \mathbf{u} – wektor przemieszczenia, ds – nieskończenie mały odcinek wzdłuż konturu całkowania C .

Wyznaczane numerycznie na oba sposoby wartości całki J (zarówno z definicji, jak i z koncepcji *virtual shift method*) pokrywały się, jednak w przypadku analizy z wykorzystaniem wzoru (2) opartego na definicji całki J wydłużał się czas obliczeń numerycznych. Prace [10, 26–27] zawierają wskazówki, jak oszacować numerycznie wartość całki J . Uwagi zawarte w tych pracach wykorzystano w prezentowanych obliczeniach numerycznych.

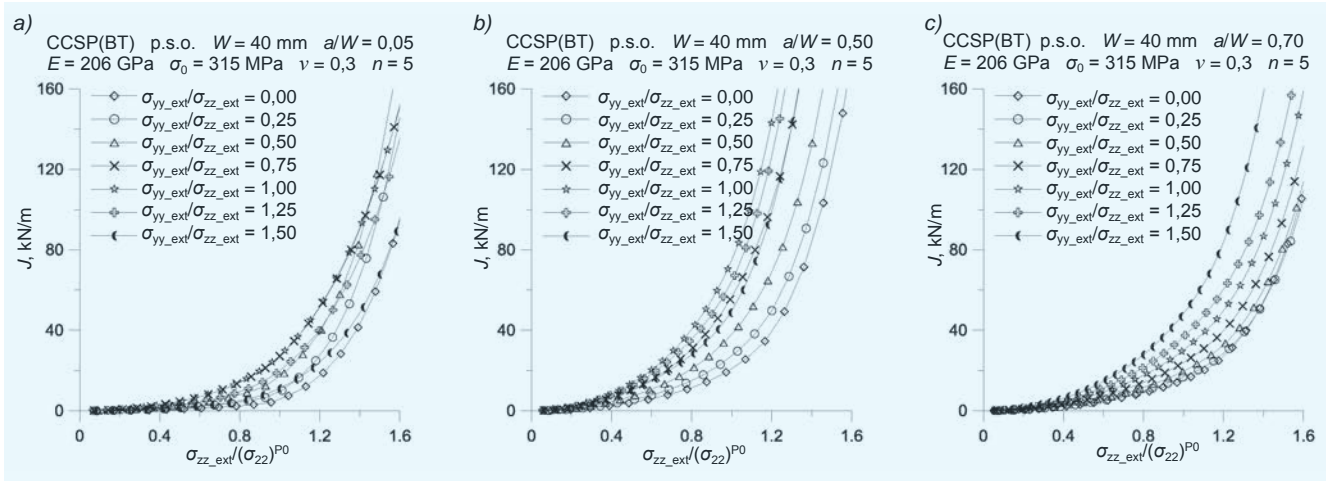
Wybrane wyniki analizy numerycznej dla płyt CCSP(BT)

W trakcie analizy wyników numerycznych w niniejszej pracy ograniczono się do oceny wartości całki J w zależności od rodzaju obciążenia i względnej długości pęknięcia, a także dokonano analizy stanu naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia dla wybranych przypadków obciążenia zewnętrznego oraz geometrii płyty związanej z długością pęknięcia. Stan naprężeń oceniono dla małych i dużych odkształceń. Ze względu na ograniczoną objętość pracy wyniki zaprezentowano tylko dla jednej kombinacji materiałowej, charakteryzującej się stałymi materiałowymi $\sigma_0 = 315 \text{ MPa}$ oraz $n = 5$. Było to uzasadnione tym, że materiał o tej charakterystyce testowany był przez Sumptera i Forbesa [28], którzy określali poziom wiewów płaskich oraz rozważali budowę kryteriów pęknięcia.

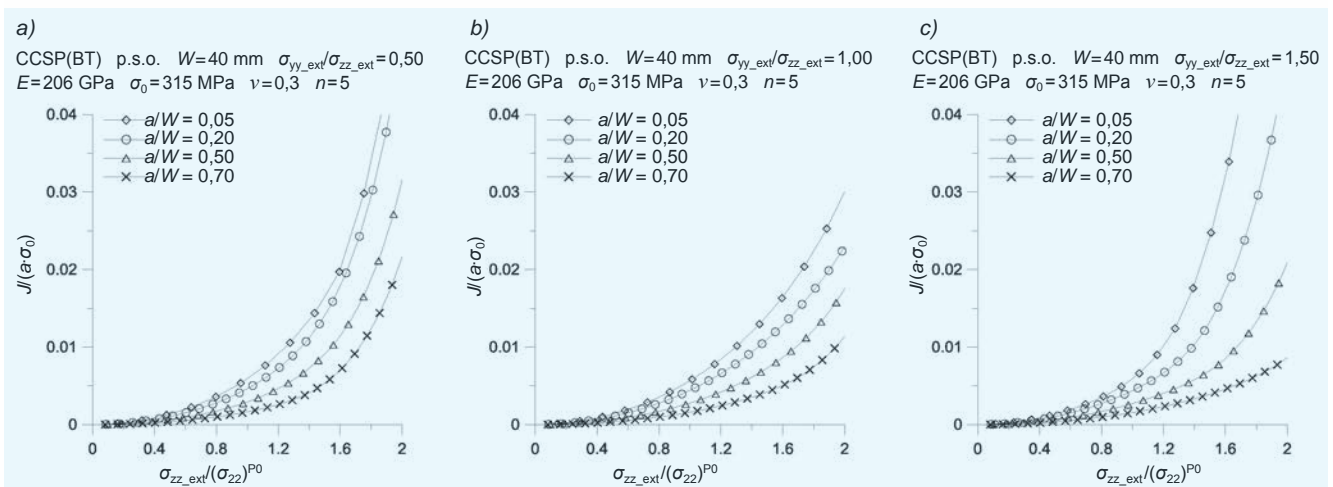
■ **Całka J – siła pociągowa szczeliny.** Na rys. 3 zaprezentowano wykresy całki J w funkcji obciążenia zewnętrznego σ_{zz_ext} normalizowanego przez obciążenie graniczne $(\sigma_{22})^{P0}$ dla różnych poziomów dwuosiowości naprężeń rozciągających $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$. Wraz ze wzrostem obciążenia zewnętrznego rośnie wartość całki J – jest to wniosek naturalny, niepodlegający dyskusji.

Krzywe $J = f(\sigma_{zz_ext}/(\sigma_{22})^{P0})$ w zależności od ilorazu $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$ systematycznie układają się jedynie w przypadku płyt zawierających bardzo długie pęknięcia $a/W = 0,70$ (rys. 3c). Im większy iloraz $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$, tym większa wartość całki J dla tego samego znormalizowanego poziomu obciążenia zewnętrznego. W przypadku szczelin normatywnych ($a/W = 0,50$) krzywe $J = f(\sigma_{zz_ext}/(\sigma_{22})^{P0})$ dla wartości ilorazów $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$ w zakresie od 0 do 1 układają się coraz wyżej, po czym dla większych wartości ilorazów $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$ ponownie obserwuje się obniżenie wartości całki J przy tym samym znormalizowanym poziomie obciążenia zewnętrznego (rys. 3c). Podobne zachowanie obserwuje się dla płyt ze szczelinami krótkimi ($a/W = 0,20$) i bardzo krótkimi ($a/W = 0,05$) – rys. 3a – z tym że wzrost wartości całki J przy tym samym





Rys. 3. Wpływ współczynnika dwuosioowości naprężeń rozciągających płytę $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$ na układ krzywych $J = f(\sigma_{zz_ext}/(\sigma_{22})^{P0})$ dla płyt CCSP(BT): a) $a/W = 0,05$; b) $a/W = 0,50$; c) $a/W = 0,70$



Rys. 4. Wpływ względnej długości pęknięcia a/W na układ krzywych $(J/(a \cdot \sigma_0) = f(\sigma_{zz_ext}/(\sigma_{22})^{P0})$ dla płyt CCSP(BT): a) $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext} = 0,50$; b) $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext} = 1,00$; c) $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext} = 1,50$

poziomie znormalizowanego obciążenia zewnętrznego obserwuje się w zakresie ilorazów $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext} = 0-1$ oraz $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext} = 0-0,75$, odpowiednio dla $a/W = 0,20$ oraz $a/W = 0,05$.

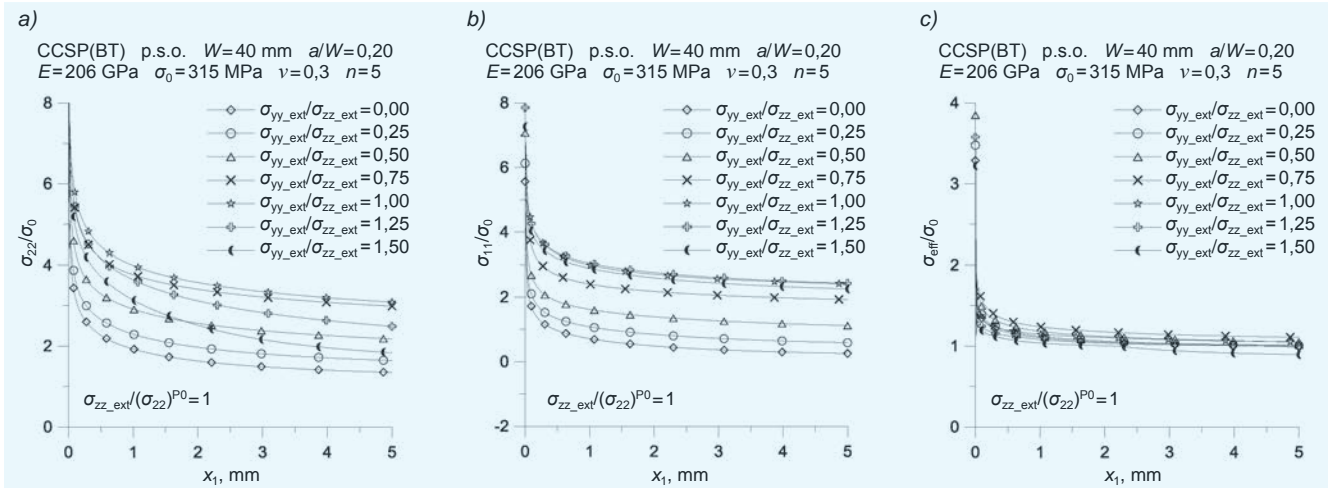
Na rys. 4 pokazano zależność całki J normalizowanej przez iloczyn długości pęknięcia i granicy plastyczności od znormalizowanego obciążenia zewnętrznego dla płyt CCSP(BT) poddanych obciążeniu według identycznego schematu (ta sama wartość ilorazu $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$), ale mających pęknięcia o różnej długości. Wzrost długości pęknięcia powoduje spadek znormalizowanej wartości całki J przy tym samym poziomie obciążenia zewnętrznego.

■ Rozkład naprężeń przy założeniu małych odkształceń. Analiza rozkładów naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia w płytach CCSP(BT) prowadzona była dwuetapowo – w MES założono małe i duże odkształcenia. Założenie małych odkształceń pozwala numerycznie oszacować wartość całki J (siła pociągowa szczeliny i parametr kontrolujący poziom więzów geometrycznych przed wierzchołkiem pęknięcia), jednakże skutkuje osobliwością naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia – naprężenia dążą do nieskończoności (rys. 5).

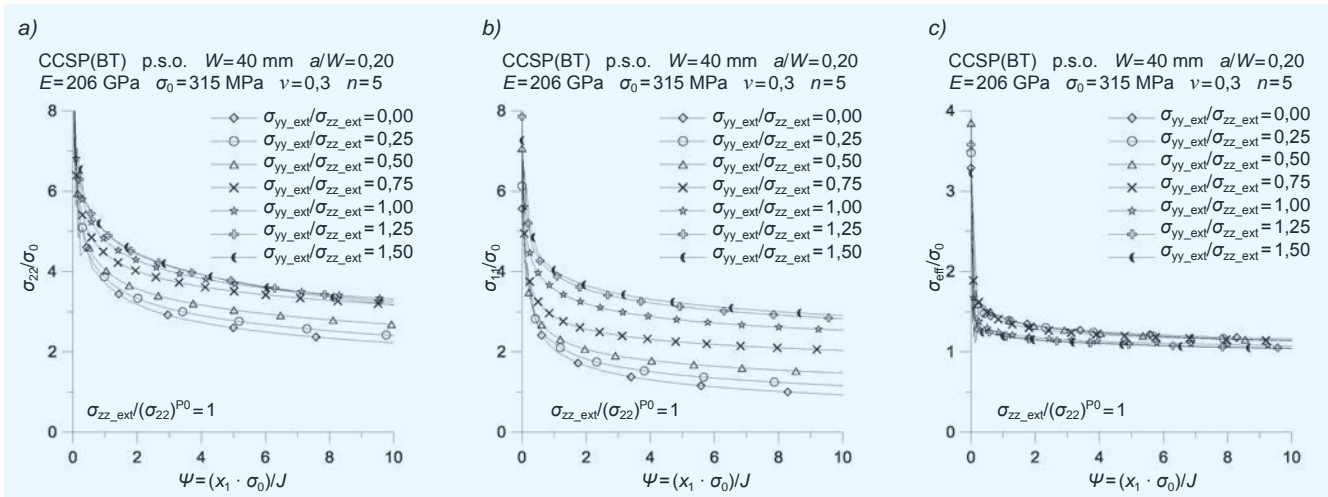
Na rys. 5 widać zmiany naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia w płycie CCSP(BT) o długości pęknięcia $a/W = 0,20$ dla różnych wartości ilorazu $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$, będących miarą obciążeń rozciągających płytę. Wyniki

przedstawiono dla stanu, w którym $\sigma_{zz_ext}/(\sigma_{22})^{P0} = 1$; naprężenia przedstawiane są w funkcji fizycznej odległości od wierzchołka pęknięcia x_1 . Materiał, którego dotyczy zestawienie, charakteryzuje się odpornością na pęknięcie granicznego [28]. Ciekawostką jest, że przy bardzo dużych odkształceniach plastycznych materiał ten pęka krucho [29].

Wzrost poziomu dwuosioowości naprężeń rozciągających płytę powoduje, że naprężenia rozwierające powierzchnie pęknięcia (rys. 5a) oraz naprężenia styczne do powierzchni szczeliny (rys. 5b) rosną w zakresie zmian ilorazu $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext} = 0-1$. Gdy iloraz naprężeń rozciągających $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$ wynosi 1,25 oraz 1,50, obserwuje się spadek wartości naprężeń, przy czym w przypadku naprężeń stycznych do powierzchni szczeliny spadek ten jest bardzo nieznaczny. Zarówno naprężenia σ_{22} rozwierające powierzchnie pęknięcia, jak i naprężenia σ_{11} styczne do powierzchni pęknięcia wyraźnie zależą od ilorazu $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$ będącego miarą naprężeń rozciągających płytę CCSP(BT) w dwóch kierunkach. Iloraz ten w bardzo małym stopniu wpływa na rozkład naprężeń efektywnych (rys. 5c) – średnia różnica pomiędzy rozkładem naprężeń efektywnych dla ilorazu $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext} = 0$ (stan dla płyty rozciąganej w jednym kierunku, normalnym do powierzchni szczeliny) oraz ilorazu $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext} = 1,50$ (płyta rozciągana w dwóch kierunkach) wynosi ok. 20% wartości granicy plastyczności σ_0 .



Rys. 5. Rozkład naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia w płytach CCSP(BT) dla różnych konfiguracji obciążenia zewnętrznego $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$ dla $\sigma_{zz_ext}/(\sigma_{22})^{P0} = 1$: a) naprężenia σ_{22} rozwierające powierzchnie pęknięcia; b) naprężenia σ_{11} styczne do powierzchni pęknięcia; c) naprężenia efektywne σ_{eff} ; naprężenia normalizowane przez granicę plastyczności przedstawiono w funkcji fizycznej odległości od wierzchołka pęknięcia x_1



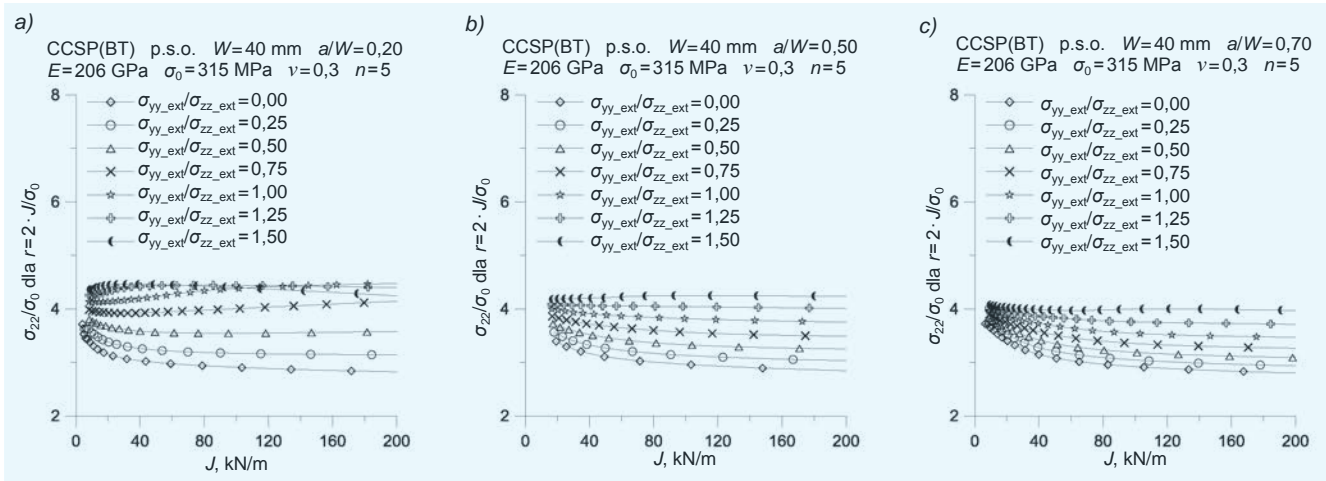
Rys. 6. Rozkład naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia w płytach CCSP(BT) dla różnych konfiguracji obciążenia zewnętrznego $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$ dla $\sigma_{zz_ext}/(\sigma_{22})^{P0} = 1$: a) naprężenia σ_{22} rozwierające powierzchnie pęknięcia; b) naprężenia σ_{11} styczne do powierzchni pęknięcia; c) naprężenia efektywne σ_{eff} ; naprężenia normalizowane przez granicę plastyczności przedstawiono w funkcji znormalizowanej odległości od wierzchołka pęknięcia $\psi = (x_1 \cdot \sigma_0)/J$

W przypadku zmiany współrzędnej odciętej z fizycznej odległości od wierzchołka pęknięcia x_1 (rys. 5) na odległość znormalizowaną $\psi = (x_1 \cdot \sigma_0)/J$ (rys. 6) można zauważyć, że w bardzo bliskim sąsiedztwie wierzchołka pęknięcia dla odległości $\psi = (0-6)$ naprężenia normalne i styczne do powierzchni pęknięcia rosną wraz ze wzrostem współczynnika dwuosiowości zewnętrznych naprężeń rozciągających płytę $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$ (rys. 6a i b). Wybrany zakres znormalizowanych odległości $\psi = (0-6)$ jest przez wielu badaczy [4–13] wykorzystywany w analizie poziomu więzów geometrycznych wpływających na odporność na pęknięcie oraz rozkład naprężeń. Zakres ten dla prezentowanego poziomu obciążenia zewnętrznego, charakterystyki materiałowej i geometrii płyty CCSP(BT) wynosi 0–0,3 mm dla $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext} = 0,0-0,5$ mm dla $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext} = 1,50$, oraz 0–2 mm dla $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext} = 1$. Jest to zatem parametr zależny od długości pęknięcia, granicy plastyczności, a przede wszystkim całej J , która w zasadzie determinuje wartość parametru ψ dla określonego poziomu obciążenia zewnętrznego.

Dla wybranej przez O'Dowda [4,5] znormalizowanej odległości od wierzchołka pęknięcia $\psi = 2$, w której dokonuje się oszacowania naprężeń Q [4,5,10–13] względnie współczynnika trójosiowości naprężeń T_z (zgodnie z zapisem Guo Wanlin: $T_z = \sigma_{33}/(\sigma_{11} + \sigma_{22})$) [6–10], różni-

ca pomiędzy naprężeniami rozwierającymi powierzchnie pęknięcia dla schematów obciążenia $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext} = 1,50$ oraz $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext} = 0$ wynosi $1,2 \cdot \sigma_0$, natomiast dla naprężeń stycznych do powierzchni pęknięcia – $2 \cdot \sigma_0$. Wykres naprężeń efektywnych w funkcji znormalizowanej współrzędnej ψ (rys. 6c) pozwala stwierdzić, że im większy poziom dwuosiowości naprężeń rozciągających płytę, tym niższe są naprężenia efektywne w bliskim sąsiedztwie wierzchołka pęknięcia – różnica pomiędzy stanem obciążenia $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext} = 0$ oraz $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext} = 1,50$ wynosi ok. 20% granicy plastyczności.

Na rys. 7 zaprezentowano zmiany naprężeń σ_{22} rozwierających powierzchnie szczeliny w funkcji rosnącego obciążenia zewnętrznego wyrażonego poziomem całki J , oszacowane dla znormalizowanej odległości od wierzchołka pęknięcia $\psi = (x_1 \cdot \sigma_0)/J = 2$. Jak daje się zauważyć, dla płyt CCSP(BT) z bardzo długimi i długimi pęknięciami (odpowiednio $a/W = 0,70$ oraz $0,50$) wzrost poziomu dwuosiowości naprężeń rozciągających (wyrażony za pomocą ilorazu $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$) powoduje wzrost wartości naprężeń rozwierających powierzchnie szczeliny. Dla obciążeń zewnętrznych $\sigma_{zz_ext}/(\sigma_{22})^{P0} = 1$ różnica pomiędzy wartościami naprężeń rozwierających powierzchnie szczeliny dla stanów $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext} = 1,50$ oraz $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext} = 0$ jest równa wartości granicy plastyczności.



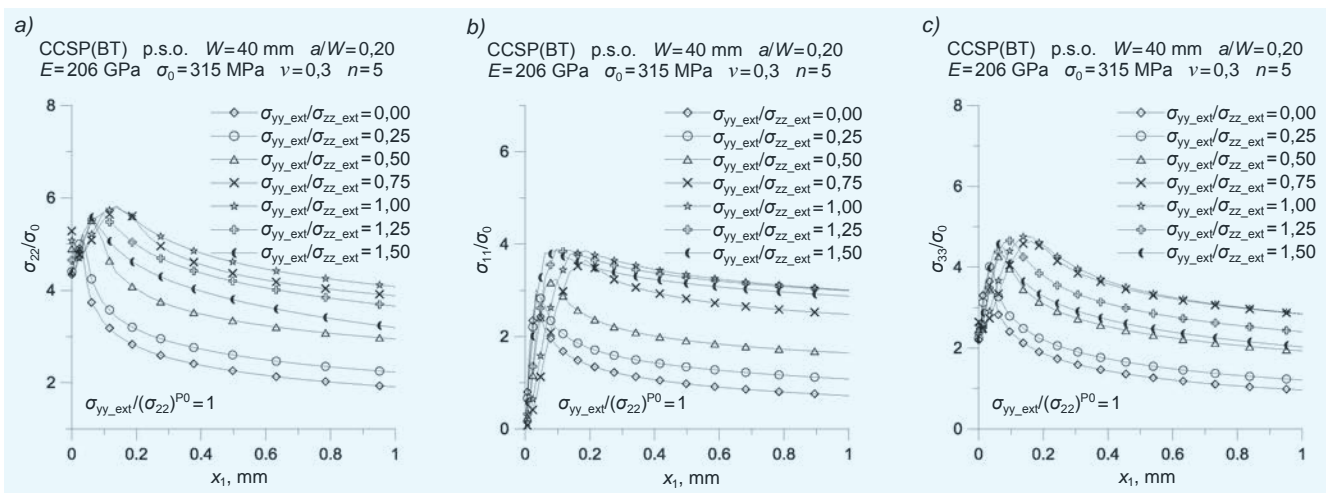
Rys. 7. Zmiana naprężeń rozwierających powierzchnie szczeliny σ_{22} w funkcji całki J dla płyt CCSP(BT). Rozkład naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia w płytach CCSP(BT) o różnej konfiguracji obciążenia zewnętrznego $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$: a) $a/W = 0,20$; b) $a/W = 0,50$; c) $a/W = 0,70$; naprężenia normalizowane przez granicę plastyczności przedstawiono dla jednej wybranej znormalizowanej odległości od wierzchołka pęknięcia $\psi = (x_1 \cdot \sigma_0)/J = 2$

W niektórych przypadkach obciążenia zewnętrzne – widocznych na wykresach z rys. 7 – można mówić o niemalże liniowej zależności pomiędzy naprężeniami σ_{22} mierzonymi w odległości $\psi = 2$ a całką J . Na rys. 7a pokazano zmianę naprężeń σ_{22} w funkcji całki J dla płyt CCSP(BT) o względnej długości pęknięcia $a/W = 0,20$. W przypadku obciążeń zewnętrznych mniejszych od obciążeń granicznych dla płyt o tej długości pęknięcia można obserwować taki sam wpływ ilorazu $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$ na krzywe $\sigma_{22}/\sigma_0 = f(J)$ jak dla płyt z dłuższymi pęknięciami – im większa wartość ilorazu $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$, tym większa wartość naprężeń rozwierających powierzchnie szczeliny. W przypadku płyt CCSP(BT) z krótkimi pęknięciami ($a/W = 0,20$) wzrostowi obciążenia zewnętrznego ($\sigma_{zz_ext}/(\sigma_{22})^{P0} > 1$) towarzyszy nieznaczny spadek wartości naprężeń rozwierających powierzchnie szczeliny.

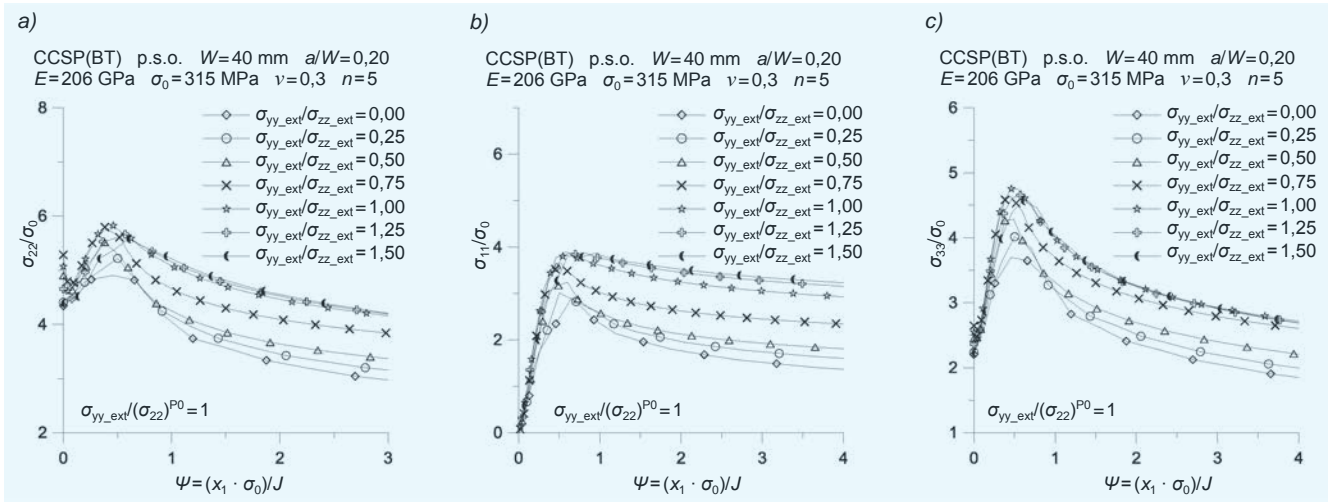
■ **Rozkład naprężeń przy założeniu dużych odkształceń.** Analiza stanu naprężeń przy założeniu małych odkształceń jest niezbędna w wielu zagadnieniach mechaniki pęknięcia. Jednak w rzeczywistym elemencie konstrukcyjnym naprężenia są skończone. Aby uniknąć osobliwości naprężeń w trakcie obliczeń MES, do analizy należy przyjąć duże odkształcenia [10].

Na rys. 8 zaprezentowano rozkład naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia w płytach CCSP(BT) o długości pęknięcia $a/W = 0,20$ dla różnych wartości $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$ będących miarą obciążeń rozciągających płytę. Wyniki dotyczą stanu, w którym $\sigma_{zz_ext}/(\sigma_{22})^{P0} = 1$ – naprężenia przedstawiane są w funkcji fizycznej odległości od wierzchołka pęknięcia x_1 . Założenie w analizie MES dużych odkształceń pozwala ocenić poziom maksymalnych naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia [10, 29]. Wzrost ilorazu naprężeń rozciągających $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$ powoduje wzrost wartości maksymalnej naprężeń rozwierających powierzchnie szczeliny σ_{22} oraz odsunięcie fizycznego położenia tych naprężeń od wierzchołka pęknięcia (rys. 8a). Stwierdzenie to jest prawdziwe dla ilorazu w zakresie 0–1. Dla wartości ilorazu $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$ 1,25 oraz 1,50 obserwuje się nieznaczny spadek maksymalnych naprężeń rozwierających powierzchnie szczeliny i fizyczne zbliżenie się tego maksimum do wierzchołka pęknięcia.

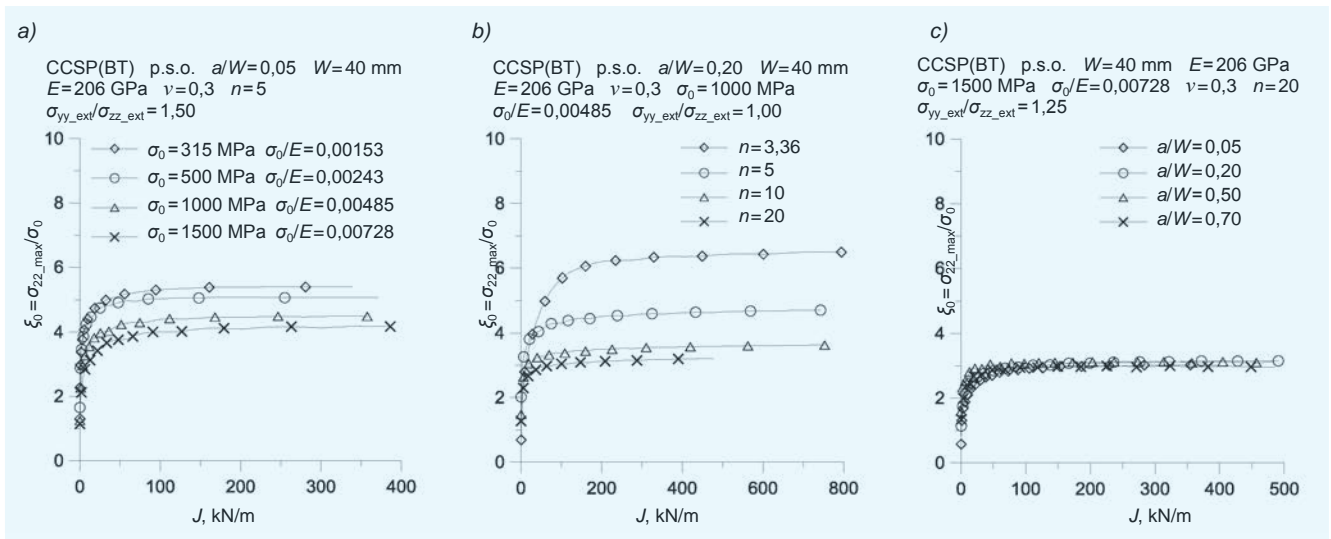
W przypadku naprężeń σ_{11} stycznych do powierzchni pęknięcia (rys. 8b) wraz ze wzrostem ilorazu $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$ obserwuje się wzrost wartości maksymalnej naprężeń σ_{11} i ich odsuwanie się od wierzchołka pęknięcia. Na rys. 9 zaprezentowano te same rozkłady naprężeń co na rys. 8, ale w funkcji znormalizowanej odległości od wierzchołka



Rys. 8. Rozkład naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia w płytach CCSP(BT) dla różnych konfiguracji obciążenia zewnętrznego $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$ dla $\sigma_{zz_ext}/(\sigma_{22})^{P0} = 1$: a) naprężenia σ_{22} rozwierające powierzchnie pęknięcia; b) naprężenia σ_{11} styczne do powierzchni pęknięcia; c) naprężenia σ_{33} ; naprężenia normalizowane przez granicę plastyczności przedstawiono w funkcji fizycznej odległości od wierzchołka pęknięcia x_1



Rys. 9. Rozkład naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia w płytach CCSP(BT) dla różnych konfiguracji obciążenia zewnętrznego $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$ dla $\sigma_{zz_ext}/(\sigma_{zz})^{P0} = 1$: a) naprężenia σ_{22} rozwierające powierzchnię pęknięcia; b) naprężenia σ_{11} styczne do powierzchni pęknięcia; c) naprężenia σ_{33} ; naprężenia normalizowane przez granicę plastyczności przedstawiono w funkcji znormalizowanej odległości od wierzchołka pęknięcia $\psi = (x_1 \cdot \sigma_0)/J$



Rys. 10. Wpływ granicy plastyczności (a), wykładnika umocnienia (b) oraz względnej długości pęknięcia (c) na rozkład krzywych $\xi_0 = f(J)$ dla płyt CCSP(BT) zdominowanych przez p.s.o.

pęknięcia $\psi = (x_1 \cdot \sigma_0)/J$. Widać, że wraz ze wzrostem ilorazu $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$ poziom naprężeń maksymalnych σ_{11} , σ_{22} oraz σ_{33} rośnie. Nie zmienia się w zasadzie znormalizowane położenie tego maksimum, które dla badanej konfiguracji materiałowej, długości pęknięcia oraz obciążenia zewnętrznego wynosi $\psi_0 = 0,5$.

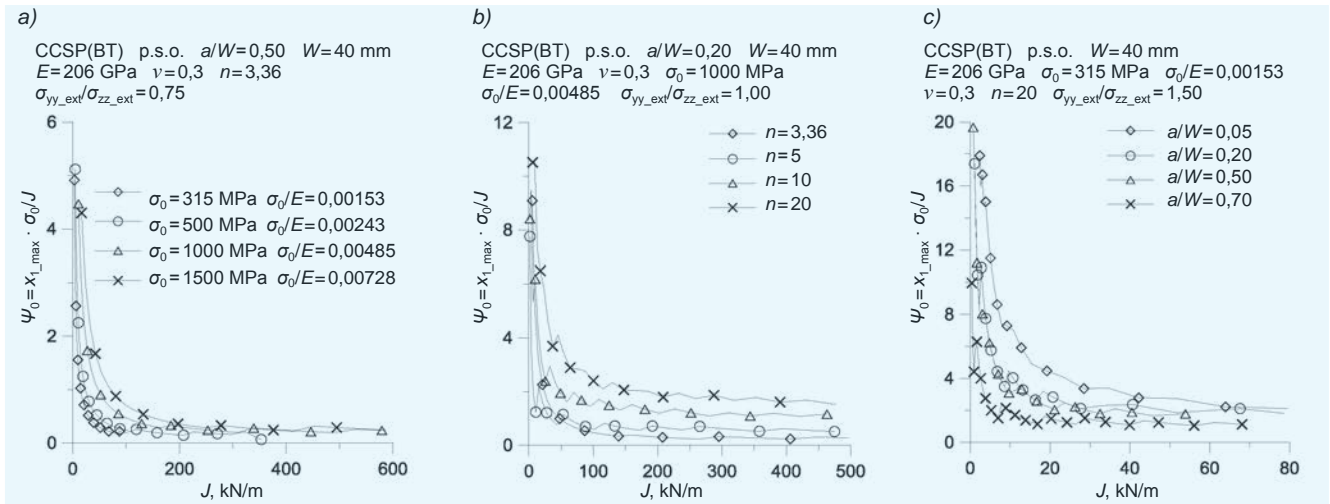
Analiza numeryczna wskazuje na zależność maksymalnych naprężeń rozwierających powierzchnię szczeliny (oznaczanych jako $\xi_0 = \sigma_{22_max}/\sigma_0$) i ich znormalizowanego położenia (oznaczanego jako $\psi_0 = (x_{1_max} \cdot \sigma_0)/J$) od charakterystyki materiałowej, względnej długości pęknięcia, obciążenia zewnętrznego i ilorazu $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$. To potwierdza wnioski zawarte w [10, 29].

Na rys. 10 pokazano wpływ stałych materiałowych i długości pęknięcia geometrii płyty CCSP(BT) na wybrane krzywe $\xi_0 = f(J)$. Im większa jest granica plastyczności, tym mniejsza wartość maksymalnych naprężeń rozwierających powierzchnię szczeliny (rys. 10a). Podobny efekt obserwuje się w przypadku spadku stopnia umocnienia materiału wyrażanego wykładnikiem umocnienia n w prawie R-O (rys. 10b). Przeprowadzona analiza potwierdziła fakt, że wartość maksymalnych naprężeń rozwierających

powierzchnie pęknięcia nie jest wrażliwa na zmianę długości pęknięcia (rys. 10c).

Na rys. 11 pokazano wybrane krzywe $\psi_0 = f(J)$ dla płyty CCSP(BT) o różnej charakterystyce materiałowej, geometrii i sposobie obciążenia. Wzrost granicy plastyczności (rys. 11a) oraz spadek stopnia umocnienia materiału (rys. 11b) powodują zwiększenie wartości znormalizowanej odległości naprężeń maksymalnych od wierzchołka pęknięcia. Taki sam efekt powoduje zmniejszanie długości pęknięcia (rys. 11c), przy czym wpływ długości pęknięcia maleje wraz ze wzrostem stopnia umocnienia materiału. Dla niepublikowanych w pracy przebiegów krzywych $\psi_0 = f(J)$ w przypadku płyt charakteryzujących się dużym i bardzo dużym stopniem umocnienia materiału (odpowiednio $n = 3,36$ oraz $n = 5$) praktycznie nie obserwowano wpływu długości pęknięcia na znormalizowane położenie maksymalnych naprężeń rozwierających powierzchnię szczeliny.

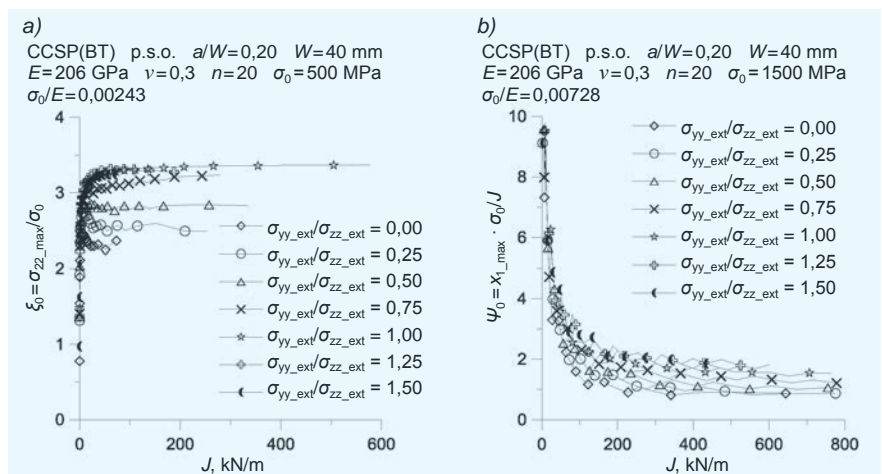
Poziom maksymalnych naprężeń rozwierających powierzchnię szczeliny i położenie tych naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia są również wrażliwe na poziom dwuosiowości naprężeń rozciągających płytę, co jest



Rys. 11. Wpływ granicy plastyczności (a), wykładnika umocnienia (b) oraz względnej długości pęknięcia (c) na rozkład krzywych $\psi_0 = f(J)$ dla płyt CCSP(BT) zdominowanych przez p.s.o.

wyrażane ilorazem $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$. Na rys. 12 zaprezentowano wpływ ilorazu $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$ na rozkład krzywych $\xi_0 = f(J)$ oraz $\psi_0 = f(J)$ dla wybranych płyt CCSP(BT). Można zauważyć, że zwiększenie poziomu dwuosiowości naprężeń rozciągających płytę powoduje wzrost maksymalnych naprężeń rozwierających powierzchnie pęknięcia (rys. 12a) i znormalizowanej odległości tych naprężeń od wierzchołka pęknięcia (rys. 12b). Wpływ wartości ilorazu $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$ jest doskonale widoczny w przypadku materiałów bardzo słabo i słabo się umacniających. Zwiększenie stopnia umocnienia materiału (mniejsza wartość wykładnika umocnienia n w prawie R-O) eliminuje stopniowo wpływ ilorazu $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$ na rozkład krzywych $\xi_0 = f(J)$ oraz $\psi_0 = f(J)$.

Cechą wspólną krzywych $\xi_0 = f(J)$ oraz $\psi_0 = f(J)$ jest dążenie wraz z rosnącym obciążeniem zewnętrznym do osiągnięcia stanu nasycenia. W pracy [29] fakt ten został wykorzystany w budowie kryteriów pęknięcia. Autor niniejszej pracy wyznaczył również wartości maksymalnych naprężeń rozwierających powierzchnie szczeliny i ich znormalizowane położenie przed frontem pęknięcia dla stanu nasycenia krzywych $\xi_0 = f(J)$ oraz $\psi_0 = f(J)$. Wartości te zostały stabilizowane i opracowane w formie graficznej. Wybrane rezultaty analizy poddano również aproksymacji wzorami matematycznymi. Niektóre rezultaty obliczeń numerycznych dla stanu nasycenia krzywych $\xi_0 = f(J)$ oraz $\psi_0 = f(J)$ zaprezentowano w tabelcy. Pozostałe wyniki zostaną wkrótce opublikowane wraz z aplikacją komputerową pozwalającą na ich przeglądanie.



Rys. 12. Wpływ ilorazu $\sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext}$ naprężeń rozciągających płytę CCSP(BT) na rozkład krzywych $\xi_0 = f(J)$ (a) oraz $\psi_0 = f(J)$ (b) – wykresy dla materiału bardzo słabo się umacniającego

TABLICA. Numerycznie oszacowane wartości maksymalnych naprężeń rozwierających powierzchnie pęknięcia $\xi_0 = \sigma_{22,max}/\sigma_0$ i ich znormalizowanego położenia przed wierzchołkiem pęknięcia $\psi_0 = X_{22,max} \cdot \sigma_0 / J$ dla stanu nasycenia krzywych $\xi_0 = \xi_0(J)$ oraz $\psi_0 = \psi_0(J)$ dla płyt CCSP(BT) zdominowanych przez p.s.o. – wyniki dla wybranych płyt CCSP(BT)

$\xi_0 = \sigma_{22,max}/\sigma_0$					$\psi_0 = X_{1,max} \cdot \sigma_0 / J$						
$\sigma_0 = 315 \text{ MPa}, \sigma_0/E = 0,00153, \sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext} = 0,50$					$\sigma_0 = 315 \text{ MPa}, \sigma_0/E = 0,00153, \sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext} = 0,50$						
n	a/W	0,05	0,20	0,50	0,70	n	a/W	0,05	0,20	0,50	0,70
3,36		9,105762	8,399079	8,893556	8,831032	3,36		0,041128	0,219404	0,157226	0,173947
5		5,022476	5,570085	5,505577	5,536444	5		0,543251	0,371868	0,435783	0,419407
10		3,316878	3,591979	3,561714	3,423683	10		1,893523	0,746948	0,683096	0,700925
20		2,963068	2,90645	2,717139	2,71615	20		2,336402	0,958991	1,21995	0,941443
$\sigma_0 = 500 \text{ MPa}, \sigma_0/E = 0,00243, \sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext} = 1,00$					$\sigma_0 = 500 \text{ MPa}, \sigma_0/E = 0,00243, \sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext} = 1,00$						
n	a/W	0,05	0,20	0,50	0,70	n	a/W	0,05	0,20	0,50	0,70
3,36		7,632047	7,880227	7,932773	8,17252	3,36		0,240476	0,212049	0,204151	0,10627
5		5,24346	5,3742	5,292613	5,219387	5		0,627171	0,458745	0,404612	0,443005
10		3,828607	3,870353	3,672927	3,575027	10		1,314003	1,003042	0,882286	0,873197
20		3,314713	3,36626	3,090993	2,95756	20		2,19206	1,431624	1,073065	1,141641
$\sigma_0 = 1000 \text{ MPa}, \sigma_0/E = 0,00485, \sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext} = 1,50$					$\sigma_0 = 1000 \text{ MPa}, \sigma_0/E = 0,00485, \sigma_{yy_ext}/\sigma_{zz_ext} = 1,50$						
n	a/W	0,05	0,20	0,50	0,70	n	a/W	0,05	0,20	0,50	0,70
3,36		6,167783	6,26887	6,493053	6,469953	3,36		0,323227	0,286413	0,261955	0,255876
5		4,48567	4,587667	4,732417	4,695503	5		0,705532	0,68227	0,538671	0,511884
10		3,254027	3,515313	3,61327	3,544333	10		1,222606	1,323216	1,040585	0,952059
20		2,970853	3,104203	3,233577	3,102997	20		2,317373	1,937433	1,450161	1,242858

Podsumowanie

Zaprezentowana analiza numeryczna wybranych parametrów mechaniki pęknięcia dla płyt z centralną szczeliną (CCSP(BT)) poddawanych dwuosowemu rozciąganiu nie wyczerpuje tematyki sprężysto-plastycznej mechaniki pęknięcia. Przedstawiono szczegóły obliczeń numerycznych i modelu MES wykorzystanego w analizie. Dla wybranych płyt zaprezentowano zależność całki J (parametru uznanego za siłę pociągową szczeliny) od stałych materiałowych, geometrii płyty oraz sposobu jej obciążenia. Poddano dyskusji rozkłady naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia w płytach CCSP(BT) rozciąganych w dwóch kierunkach przy założeniu małych i dużych odkształceń. Analizując uzyskane wyniki przy założeniu dużych odkształceń, oceniono wpływ charakterystyki materiałowej, geometrii płyty oraz sposobu obciążenia na poziom naprężeń maksymalnych i ich położenie przed wierzchołkiem pęknięcia. Wyniki analizy zobrazowano na wykresach.

Wnioski wypływające z zaprezentowanej analizy są podstawą do dyskusji nad wyborem parametrów służących do opisu poziomu więzów płaskich (*in-plane constraints*), będących naturalnym ograniczeniem, jakie materiał stawia odkształceniom plastycznym rozwijającym się pod wpływem obciążenia zewnętrznego. Takim parametrem wydaje się poziom maksymalnych naprężeń rozwierających powierzchnie szczeliny, jak również położenie tych naprężeń względem wierzchołka pęknięcia. Należy zaznaczyć, że parametry te wykorzystywano do budowy kryteriów pęknięcia [29], co może być pomocne przy rozwiązywaniu rzeczywistych zagadnień inżynierskich.

Przedstawione wyniki nie wyczerpują poruszonej tematyki. W przyszłości autor pracy zamierza zaprezentować

kompletne zestawienia wartości maksymalnych naprężeń rozwierających powierzchnie szczeliny dla analizowanych modeli materiałów, kombinacji względnej długości pęknięcia oraz poziomów obciążenia zewnętrznego. Warto rozwinąć tematykę oszacowywania całki J w celu wypracowania propozycji hybrydowych rozwiązań pozwalających na określenie tego parametru mechaniki pęknięcia bez konieczności prowadzenia obliczeń numerycznych. Uzupełnieniem analizy powinna być ocena numerycznie oszacowanego rozwarcia wierzchołka pęknięcia, które również uznaje się za ważny parametr mechaniki pęknięcia i wykorzystuje przy budowie kryteriów pęknięcia. Ewentualne rozszerzenie prowadzonej analizy na przypadki trójwymiarowe mogłoby się okazać interesującym podejściem i wnieść nowe elementy do mechaniki pęknięcia.

Pracę wykonano w ramach realizacji projektu badawczego IUVENTUS PLUS o numerze IP2012 011872, finansowanego ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

LITERATURA

1. Hutchinson J.W. "Singular behavior at end of tensile crack in hardening material". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. Vol. 16, No. 1 (1968): pp. 13–31.
2. Rice J.R., Rosengren G.F. "Plane strain deformation near crack tip in power-law hardening material". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. Vol. 16, No. 1 (1968): pp. 1–12.
3. McClintock F.A. "Plasticity aspects of fracture". Liebowitz H. *Fracture – an Advanced Treatise*. Vol. 3 (1971): pp. 47–225.
4. O'Dowd N.P., Shih C.F. "Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter; I. Structure of fields". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. Vol. 39, No. 8 (1991): pp. 989–1015.
5. O'Dowd N.P., Shih C.F. "Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter; II. Fracture applications". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. Vol. 40, No. 5 (1992): pp. 939–963.



6. Guo Wanlin. "Elastoplastic three dimensional crack border field; I. Singular structure of the field". *Engineering Fracture Mechanics*. Vol. 46, No. 1 (1993): pp. 93–104.
7. Guo Wanlin. "Elastoplastic three dimensional crack border field; II. Asymptotic solution for the field". *Engineering Fracture Mechanics*. Vol. 46, No. 1 (1993): pp. 105–113.
8. Guo Wanlin. "Elastoplastic three dimensional crack border field; III. Fracture parameters". *Engineering Fracture Mechanics*. Vol. 51, No. 1 (1995): pp. 51–71.
9. Neimitz A., Graba M. "Analytical-numerical hybrid method to determine the stress field in front of the crack in 3D elastic-plastic structural elements". *XVII ECF*. Brno – Czech Republic: September 2008. CD, abstract: pp. 85.
10. Graba M. "Numerical analysis of the mechanical fields near the crack tip in the elastic-plastic materials. 3D problems". Praca doktorska. Kielce: Politechnika Świętokrzyska, 2009, s. 387.
11. Graba M. "Catalogue of the numerical solutions for SEN(B) specimen assuming the large strain formulation and plane strain condition". *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. Elsevier. Vol. 12, Iss. 1 (2012): pp. 29–40.
12. Graba M. "The influence of material properties and crack length on the Q-stress value near the crack tip for elastic-plastic materials for centrally cracked plate in tension". *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. Vol. 50, Iss. 1(2012): pp. 23–46.
13. Graba M. "Catalogue of maximum opening crack stress for CCT specimen assuming large strain condition". *Central European Journal of Engineering*. Springer. DOI: 10.2478/s13531-012-0063-8, 2013.
14. SINTAP. "SINTAP: Structural Integrity Assessment Procedures for European Industry. Final Procedure". Brite-Euram Project No BE95-1426. Rotherham: British Steel, 1999.
15. FITNET. "FITNET Report, (European Fitness-for-service Network)". M. Kocak, S. Webster, J.J. Janosch, R.A. Ainsworth, R. Koers. Contract No. G1RT-CT-2001-05071, 2006.
16. Anderson T.L. "Fracture Mechanics – Fundamentals and Applications". CRC Press, Corporate Blvd., N.W., Boca Raton, Florida 33431, 2000.
17. Shih C.F. "Small-scale yielding analysis of mixed-mode plane-strain crack problems". *Fracture Analysis*. ASTM STP 560, ASTM, 1974, pp. 187–220.
18. Neimitz A., Dzioba I., Graba M., Okrajni J. "The assessment of the strength and safety of the operation high temperature components containing crack". Kielce: Kielce University of Technology Publishing House 2008.
19. Graba M. „O wyznaczaniu obciążeń granicznych płyt kwadratowych z centralną szczeliną w dwuosiowym rozciąganiu”. *Computer Systems Aided Science Industry and Transport, Conference Proceedings, 19-th International Conference TRANSCOMP 2015*. Zakopane, 20.11–3.12.2015.
20. Graba M. „Charakterystyka pól naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia dla kwadratowej płyty poddanej dwuosiowemu rozciąganiu”. *Computer Systems Aided Science Industry and Transport, Conference Proceedings, 19th International Conference TRANSCOMP 2015*. Zakopane, 20.11–3.12.2015.
21. Meek C., Ainsworth R.A. "The effects of load biaxiality and plate length on the limit load of a centre-cracked plate". *Engineering Fracture Mechanics* (2015): <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfrac-mech.2015.03.034>.
22. Huang Y., Zhang L., Guo T.F., HwangK.-C. "Mixed mode near-tip fields for cracks in materials with strain-gradient effects". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. Vol. 45, No. 3 (1997): pp. 439–465.
23. Subramanya H.Y., Viswanath S., Narasimhan R. "A three-dimensional numerical study of mixed mode (I and II) crack tip fields in elastic-plastic solids". *International Journal of Fracture*. Vol. 136 (2005): pp. 167–185, DOI 10.1007/s10704-005-5422-5.
24. ADINA 8.8. "ADINA: User Interface Command Reference Manual – Volume I: ADINA Solids & Structures Model Definition". Report ARD 11-2, ADINA R&D, Inc., 2011.
25. ADINA 8.8. "ADINA: Theory and Modeling Guide – Vol. I: ADINA Solids & Structures". Report ARD 11-8, ADINA R&D, Inc., 2011.
26. Brocks W., Cornec A., Scheider I. "Computational Aspects of Non-linear Fracture Mechanics". *Bruchmechanik*. GKSS-Forschungszentrum, Geesthacht, Germany, Elsevier (2003): pp. 127–209.
27. Brocks W., Scheider I. "Reliable J-Values. Numerical Aspects of the Path-Dependence of the J-integral in Incremental Plasticity". *Bruchmechanik*. GKSS-Forschungszentrum, Geesthacht, Germany, Elsevier (2003): pp. 264–274.
28. Sumpter J.D.G., Forbes A.T. "Constraint based analysis of shallow cracks in mild steel, TWI/EWI/IS". Dawes M.G.: *International Conference on Shallow Crack Fracture Mechanics Test and Application*. Cambridge, UK (1992): p. 7.
29. Neimitz A., Graba M., Gałkiewicz J. "An alternative formulation of the Ritchie-Knott-Rice local fracture criterion". *Engineering Fracture Mechanics*. Vol. 74 (2007): pp. 1308–1322.