

# Testowanie obserwacji istotnie odstępujących w próbach o rozkładzie jednostajnym

## Testing outliers in the samples with uniform distribution

MYKHAYLO DOROZHOVETS\*

DOI: 10.17814/mechanik.2016.11.453

Przeanalizowano losowe nieskorelowane obserwacje na temat liczebności  $n$ , pobrane z populacji o rozkładzie jednostajnym w celu ujawnienia oraz eliminacji istotnie odstających obserwacji lub outlierów. Wyprowadzono wzory obliczania wartości krytycznych potrzebnych do testowania na zadanym poziomie istotności  $\alpha$  jednej lub dwóch skrajnych obserwacji. Teoretyczne wyniki testowania skrajnych obserwacji zbadano metodą Monte-Carlo.

**SŁOWA KLUCZOWE:** rozkład jednostajny, obserwacje odstające, testowanie, środek rozstępu

*In the article the random not correlated uniformly distributed observations in order to detect and eliminate significantly extreme observations or outliers is analyzed. The formulas for calculating critical values which are used to test for a given significant level  $\alpha$  of the single or double extreme observations are presented. The theoretical results for testing extreme observations have been studied by Monte-Carlo.*

**KEYWORDS:** uniform distribution, outliers, testing, midrange

W ostatnich dekadach przemysłowe pomiary w coraz większym zakresie bazują na wykorzystaniu komputerowych kart pomiarowych poprzedzonych modułami kondycjonowania sygnałów z wyjść czujników pomiarowych. W procesie kondycjonowania sygnałów, rejestracji oraz przesyłania wyników pomiarów lub z innych przyczyn mogą się pojawić ekstremalne obserwacje, które odstupują od reszty obserwacji i które należałoby zidentyfikować, a następnie wyeliminować. W zależności od poziomu ufności takie ekstremalne obserwacje można podzielić na odstające oraz zbyt dużo odstające [1].

Do normalnie odstających zalicza się obserwacje związane tylko ze statystyczną zmiennością wartości losowych, dla których poziom ufności  $p$  wynosi 95–99% [1]. Zbyt dużo odstające ekstremalne obserwacje lub tzw. outliery to obserwacje które są pomyłkami lub należą do innych populacji [2], a poziom ufności  $p$  jest większy od 99% [1]. Ponieważ pomiary przemysłowe istotnie różnią się od pomiarów w specjalistycznych laboratoriach badawczych, identyfikację zbyt dużo odstających obserwacji (outlierów) należałoby wykonywać bez bezpośredniego udziału operatora, to jest w sposób automatyczny, na podstawie bieżącej analizy zarejestrowanych obserwacji. W tym celu przydatny byłby prosty i skuteczny sposób na obiektywne ujawnienie istotnie odstających obserwacji.

Rozpatrywane są szeregi  $x_1, x_2, \dots, x_n$   $n$  losowych obserwacji nieskorelowanych o rozkładzie jednostajnym (rys. 1a), o nieznanymi parametrach położenia (wartości oczekiwanej  $m_x$ ) oraz szerokości (standardowego odchylenia  $\sigma_x$  lub szerokości przedziału zmienności  $2 \cdot a$ ). Jeśli dane są przekonujące, a rozkład losowych obserwacji

jest jednostajny, najlepszym (pod względem minimalnej standardowej niepewności) parametrem położenia jest środek rozstępu [3]:

$$mr = \frac{x_{(n)} + x_{(1)}}{2} \quad (1)$$

jako wartość średnia skrajnych po uporządkowaniu obserwacji: pierwszej  $x_{(1)}$  oraz ostatniej  $x_{(n)}$ .

Standardowa niepewność środka rozstępu wyznaczana jest na podstawie połowy szerokości rozstępu  $R = (x_{(n)} - x_{(1)})/2$  oraz liczebności próby  $n$  i jest równa [3]:

$$u_A(mr) = \frac{R \cdot \sqrt{2}}{n-1} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \quad (2)$$

Przy dużych  $n$  standardowa niepewność zmniejsza się w przybliżeniu proporcjonalnie do liczby obserwacji. Jest to wynik zdecydowanie lepszy w porównaniu ze standardową niepewnością wartości średniej arytmetycznej, która zmniejsza się proporcjonalnie do pierwiastka liczby obserwacji.

Ponieważ środek rozstępu (1) wyznaczany jest poprzez wartości skrajne (ze współczynnikiem wagowym 0,5), dlatego ekstremalnie odstające obserwacje mogą całkowicie zniekształcić wynik pomiaru. Środek rozstępu przy obecności outlierów jest bardzo nieefektywny w porównaniu z wartością średnią, a tym bardziej z medianą. Duża wrażliwość środka rozstępu na ekstremalnie odstające obserwacje jest jego podstawową wadą.

Testowanie w celu następnej eliminacji odstających obserwacji bazuje najczęściej na obliczaniu pewnej miary względnej odległości wątpliwej obserwacji od najbliższej (test Dixona [4]), wartości średniej (test Grubbsa [5]) lub mediany (test Hampela [6]) itp. W innym rozwiązaniu, mającym eliminować wpływ outlierów, wykorzystuje się statystyki odpornościowe, tzw. *robust statistics* [7], w których parametr położenia próby jest estymowany np. po ucinaniu lub winsorowaniu pewnej liczby skrajnych obserwacji oraz z zastosowaniem innych metod [7]. W zagadnieniach testowania odstających obserwacji podstawowym modelem rozkładu prawdopodobieństwa populacji jest zazwyczaj rozkład normalny. Jeśli rozkład prawdopodobieństwa obserwacji istotnie różni się od normalnego, wtedy testy outlierów mogą się okazać nieskuteczne.

Przykładowo: przy rozkładzie jednostajnym względne do standardowego odchylenia  $s_x$  odchylenie  $v_e$  maksymalnie odstającej obserwacji  $x_e$  od wartości średniej  $\bar{x}$  przy braku outlierów równa się w przybliżeniu:

$$v_e = \left| x_e - \bar{x} \right|_{\max} / s_x \approx \sqrt{3} \quad (3)$$

\* Prof. dr inż. hab. Mykhaylo Dorozhovets (michdor@prz.edu.pl) – Zakład Metrologii i Systemów Diagnostycznych Politechniki Rzeszowskiej

Jeśli wykorzystamy test Grubbsa [6], dla którego wartość graniczna obliczana jest ze wzoru:

$$v_{gr,\alpha} = G_{kr}(n, \alpha) = \frac{n-1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{t_{\alpha/2n, n-2}^2}{n-2 + t_{\alpha/2n, n-2}^2}} \quad (4)$$

(gdzie  $t_{\alpha/2n, n-2}$  jest wartością z rozkładu  $t$ -Studenta), wtedy dla liczebności próby  $n = 50$  i poziomu istotności  $\alpha = 0,1\%$  oraz  $\alpha = 1\%$  wartość graniczna względnego odchylenia  $v_e$  dla outlierów według (4) wynosi:  $v_{gr,0,1\%} = 3,908$ ,  $v_{gr,1\%} = 3,482$ . Są to zbyt duże wartości.

Na podstawie (4) odchylenie outliera od wartości średniej  $\bar{x}_{(n-1)}$  może być obliczane jako:

$$\left| x_e - \bar{x}_{(n-1)} \right| = \frac{n}{n-1} \frac{G_{kr}(n, \alpha) \cdot s_{x_{(n-1)}}}{\sqrt{1 - \frac{n+1}{n^2} \cdot G_{kr}^2(n, \alpha)}} \quad (5)$$

Przyjmując w przybliżeniu, że  $\bar{x}_{(n-1)} \approx 0$  oraz  $s_{x_{(n-1)}} \approx 1$ , przy  $\alpha = 1\%$  outlier ma odstępować od reszty obserwacji około  $x_e - \sqrt{3} \approx 4,112 - \sqrt{3} \approx 2,380$ , tj. 137% od wartości granicznych  $\pm\sqrt{3}$ , a przy  $\alpha = 0,1\%$  odchylenie wynosi  $x_e - \sqrt{3} \approx 4,831 - \sqrt{3} \approx 3,10$ , tj. nawet  $\approx 179\%$ . Otóż test Grubbsa nie może być wykorzystywany do testowania outlierów w przypadku jednostajnego rozkładu obserwacji.

### Testowanie jednego outliera

Założono, że jeśli outlierem jest pierwsza (po uporządkowaniu) obserwacja  $x_{(1)} = y$  (rys. 1b), wtedy druga obserwacja  $x_{(2)} = z$  oraz ostatnia  $x_{(n)} = v$  nie są outlierami; podobnie jeśli outlierem jest ostatnia obserwacja  $x_{(n)}$  (rys. 1c), wtedy pierwsza  $x_{(1)}$  oraz przedostatnia obserwacja  $x_{(n-1)} = u$  nie są outlierami.

Łączne rozkłady prawdopodobieństwa  $d_{1_3}(y, z, v)$  trzech obserwacji: pierwszej  $y$ , drugiej  $z$  i ostatniej  $v$  oraz  $d_{1_3}(y, u, v)$  – pierwszej  $y$ , przedostatniej  $u$  i ostatniej  $v$ , opisywane są podobnymi symetrycznymi zależnościami, wynikającymi z rozkładów statystyk pozycyjnych [8]. Dlatego dalej wyprowadzone zostaną wzory dotyczące testowania tylko pierwszej odstającej obserwacji.

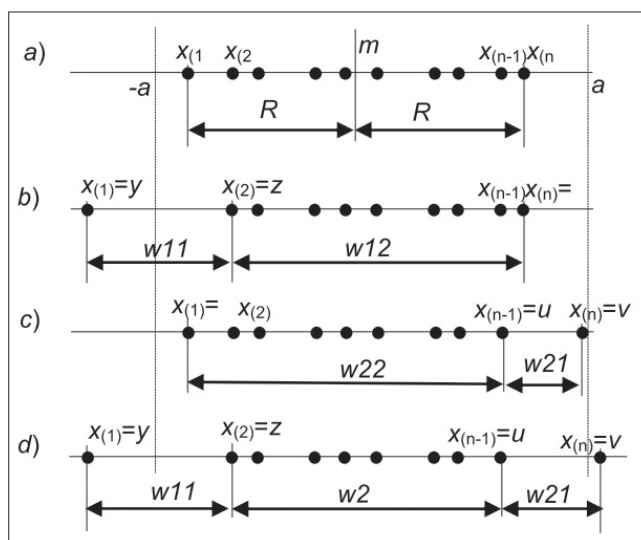
Łączny rozkład prawdopodobieństwa  $d_{1_3}(y, z, v)$  na podstawie teorii statystyk pozycyjnych [8] można przedstawić następująco:

$$d_{1_3}(y, z, v) = \frac{n(n-1)(n-2)}{(2a)^n} (v-z)^{n-3} \quad (6)$$

Wprowadzono następane zamiany:  $z-y = w11$ ,  $v-z = w12$  oraz  $r_{1,1} = w11/w12$ , jako stosunek odpowiednich odstępów niezależny od nieznannej szerokości przedziału populacji  $2 \cdot a$ . Zauważono, że  $w12$  oraz  $w22$  (rys. 1) nie są różnicami próby, jak w przypadku testu Dixona [4]. Wtedy po całkowaniu gęstości (6) najpierw w przedziale  $-a \leq y \leq z = a - w11 - w12$ , a następnie w przedziale  $0 \leq w12 \leq 2a/(r_{1,1} + 1)$  (z uwzględnieniem wartości jacobianu tego przekształcenia równego  $w12$ ) otrzymuje się gęstość rozkładu zmiennej losowej  $r_{1,1}$ :

$$d_{1_1}(r_{1,1}) = (n-2) \cdot (1+r_{1,1})^{-(n-1)}, \quad 0 \leq r_{1,1} < \infty \quad (7)$$

Po całkowaniu gęstości (7) otrzymuje się dystrybuanta losowej wartości stosunku  $r_{1,1} = r_{2,1} = r_1$ :



Rys. 1. Obserwacje o rozkładzie jednostajnym (a); próby z obserwacjami odstającymi (b-d)

$$P1(r_1) = 1 - (1+r_1)^{-(n-2)}, \quad 0 \leq r_1 < \infty, \quad n \geq 3 \quad (8)$$

Wartość krytyczna stosunku  $r_{\alpha,1}$  dla zadanego poziomu istotności  $\alpha$  jest obliczana z równania dla dystrybuanty (8):  $P1(r_{\alpha,1}) = 1 - (r_{\alpha,1} + 1)^{-(n-2)} = 1 - \alpha$ , to jest:

$$r_{\alpha,1} = \alpha^{-\frac{1}{n-2}} - 1, \quad n \geq 3 \quad (9)$$

Jeśli na podstawie analizy zarejestrowanych obserwacji obliczone wartości stosunków:

$$r_{e1,1} = \frac{x_{(2)} - x_{(1)}}{x_{(n)} - x_{(2)}} = \frac{w11}{w12}, \quad \text{lub} \quad r_{e2,1} = \frac{x_{(n)} - x_{(n-1)}}{x_{(n-1)} - x_{(1)}} = \frac{w21}{w22} \quad (10)$$

nie przekraczają krytycznej wartości  $r_{\alpha,1}$ , tj.  $r_{e1,1} \leq r_{\alpha,1}$  lub  $r_{e2,1} \leq r_{\alpha,1}$ , wtedy na poziomie istotności  $\alpha$  nie ma podstaw do eliminacji tych obserwacji jako outlierów. Natomiast jeśli  $r_{e1,1} > r_{\alpha,1}$  lub  $r_{e2,1} > r_{\alpha,1}$ , wtedy z prawdopodobieństwem  $p = 1 - \alpha$  odpowiednia obserwacja jest outlierem i należy ją wyeliminować.

### Testowanie dwóch outlierów jednocześnie

W przypadku testowania jednocześnie dwóch skrajnych obserwacji: pierwszej  $x_{(1)} = y$  oraz ostatniej  $x_{(n)} = v$ , przyjmowano, że druga  $x_{(2)} = z$  oraz przedostatnia  $x_{(n-1)} = u$  nie są outlierami (rys. 1d). Łączny rozkład prawdopodobieństwa  $d_{2_4}(y, z, u, v)$  czterech obserwacji  $y, z, u, v$  na podstawie teorii statystyk pozycyjnych [8] można opisać zależnością:

$$d_{2_4}(y, z, u, v) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(2a)^n} (u-z)^{n-4} \quad (11)$$

Do poprzednich zamian dodano kolejną zamianę:  $u-z = w2$  (który też nie jest różnicą próby) i wprowadzono stosunki odpowiednich odstępów:  $r_{1,2} = w11/w2$  oraz  $r_{2,2} = w21/w2$ , niezależne od szerokości ( $2 \cdot a$ ) przedziału zmienności populacji. Jakobian tych przekształceń jest równy  $w2^2$ . Wtedy po całkowaniu najpierw gęstości  $d_{4_1}(w2 \cdot r_1, w2, w2 \cdot r_2)$  w przedziale  $-a \leq y \leq z = a - w11 - w2 - w21$  i następnie uzyskanej zależności w przedziale  $0 \leq w2 \leq 2a/(1+r_1+r_2)$  otrzymuje się gęstość łącznego rozkładu losowych wartości  $r_1$  oraz  $r_2$  ( $0 \leq r_1 < \infty; 0 \leq r_2 < \infty$ ):

$$d_{2_2}(r_1, r_2) = (n-2)(n-3) \cdot (1+r_1+r_2)^{-(n-1)} \quad (12)$$

Z ostatniej zależności wynika, że zmienne losowe  $r_1$  oraz  $r_2$  są zależne między sobą. Dlatego należy wyznaczyć warunkowe rozkłady tych zmiennych. Bezwarunkowy rozkład  $d_{2_1}(r_1)$  zmiennej  $r_1$  niezależny od szerokości (2a) można wyprowadzić na podstawie całkowania gęstości  $d_{2_4}(y, z, u, v)$  w (11), najpierw w przedziale  $u \leq v \leq a$ , a następnie – po wprowadzeniu zamiany  $u = y + w_1 + w_2$  całkowania tej zależności – w przedziale  $-a \leq y \leq z = a - w_1 - w_2$ , w wyniku czego otrzymuje się:

$$d_{2_1}(r_1) = (n-3) \cdot (1+r_1)^{-(n-2)} \quad (13)$$

Dla rozkładów (12) oraz (13) warunkowy rozkład zmiennej losowej  $r_1$  ma postać:

$$d_{1_2}(r_1|r_2) = \frac{d(r_1, r_2)}{d(r_2)} = \frac{(n-2)(1+r_2)^{n-2}}{(1+r_1+r_2)^{n-1}} \quad (14)$$

Z ostatniej zależności łatwo wyprowadzić warunkową dystrybuantę:

$$P_2(r_1|r_2) = \int_0^{r_1} d_{1_2}(r_1|r_2) dr_1 = 1 - \left( \frac{1+r_2}{1+r_1+r_2} \right)^{n-2} \quad (15)$$

Rozkłady bezwarunkowy i warunkowy oraz warunkowa dystrybuanta zmiennej  $r_2$  opisywane są takimi samymi wzorami, jak (13), (14) i (15) przy zamianie  $r_1$  na  $r_2$ .

Wtedy ze wzoru (15) wartości krytyczne (dopuszczalne) zmiennych  $r_1$  oraz  $r_2$  są równe:

$$r_{1_\alpha} = (1+r_{2_e}) \left( \alpha^{-\frac{1}{n-2}} - 1 \right), \quad r_{2_\alpha} = (1+r_{1_e}) \left( \alpha^{-\frac{1}{n-2}} - 1 \right) \quad (16)$$

Z tych wzorów wynika, że wartość krytyczna jednej zmiennej zależy nie tylko od poziomu istotności  $\alpha$  oraz liczności próby  $n$ , ale także od zaobserwowanej wartości ( $r_{1_e}$  lub  $r_{2_e}$ ) drugiej zmiennej. Jednak przy liczności obserwacji  $n \geq 25$  wartości  $r_1$  oraz  $r_2$  są małe, to jest  $r_1 \ll 1$ ,  $r_2 \ll 1$ , i dlatego wartości krytyczne w (16) w pierwszym przybliżeniu są równe sobie:  $r_{2_\alpha} \approx r_{1_\alpha}$  i można je obliczyć na podstawie dystrybuanty  $P_2(r_{1_2}) = 1 - (1+r_{1_2})^{-(n-3)}$  bezwarunkowego rozkładu  $d_{2_1}(r_1)$ , według której wartości krytyczne są równe:

$$r_{1_{\alpha,2}} \approx r_{2_{\alpha,2}} = r_{\alpha,2} = \alpha^{-\frac{1}{n-3}} - 1, \quad n \geq 4. \quad (17)$$

Jeśli na podstawie zarejestrowanych obserwacji obliczone wartości stosunków:

$$r_{1_e} = \frac{X_{(2)} - X_{(1)}}{X_{(n-1)} - X_{(2)}} = \frac{w_{11}}{w_2}, \quad \text{lub} \quad r_{2_e} = \frac{X_{(n)} - X_{(n-1)}}{X_{(n-1)} - X_{(2)}} = \frac{w_{21}}{w_2} \quad (18)$$

nie przekraczają wartości krytycznych, wtedy na poziomie istotności  $\alpha$  nie ma podstaw do eliminacji tych obserwacji jako outlierów. Natomiast jeśli  $r_{1_e} > r_{1_\alpha}$  lub (oraz)  $r_{2_e} > r_{2_\alpha}$ , wtedy z prawdopodobieństwem  $p = 1 - \alpha$  jedną lub obydwie obserwacje należy wyeliminować.

## Wynik pomiaru oraz jego standardowa i rozszerzona niepewność

W zależności od liczby pozostałych po eliminacji outlierów obserwacji:

$$n^* = \begin{cases} n, & \text{brak outlierów;} \\ n-1, & 1 \text{ outlier;} \\ n-2, & 2 \text{ outlierzy} \end{cases} \quad (19)$$

najlepszy wynik pomiaru – środek rozstępu ( $mr$ ) jest wyznaczany według wzoru (1), a standardowa niepewność środka rozstępu  $u(mr)$  obliczana jest według wzoru (2) dla liczności obserwacji  $n^*$ . Niepewność rozszerzona dla zadanego poziomu ufności  $p$  jest równa:

$$U_p(mr) = \varepsilon_{p,n^*} \cdot R_{n^*} = k_{p,n^*} \cdot u(mr) \quad (20)$$

gdzie:  $\varepsilon_{p,n^*} = (1-p)^{-\frac{1}{n^*-1}} - 1$ , a współczynnik rozszerzenia może być obliczony według wzoru:

$$k_{p,n^*} = \varepsilon_{p,n^*} \cdot (n^* - 1) \cdot \sqrt{\frac{n^* + 2}{2(n^* + 1)}} \quad (21)$$

## Wyniki badań metodą Monte Carlo

Skuteczność zaproponowanych metod testowania jednego i dwóch outlierów została zbadana metodą Monte Carlo. Badania wykonano przy liczbie symulacji  $M = 40000$  dla liczności obserwacji  $n = 25, 50$  oraz  $75$  dla prób pobranych z populacji o rozkładzie jednostajnym (w przedziale od  $-\sqrt{3}$  do  $+\sqrt{3}$ ). Metodę testowania jednego outliera zbadano przy ujemnych (–) wartościach dla 50% prób oraz przy dodatnich (+) outlierach w innych 50% prób, a także bez outlierów. Założono, że w każdej próbie nie ma jednocześnie obydwóch outlierów.

Testowanie wykonano przy poziomach istotności  $\alpha = 0,1\%; 0,2\%; 0,5\%; 1\%$  oraz przy różnych wartościach outlierów. Względne wartości outlierów ( $r_{out,1}$ ) obliczono jako stosunek bezwzględnej wartości outliera  $y_{out,1}$  i wartości oczekiwanej odstępu pomiędzy ostatnią i drugą obserwacją:  $r_{out,1} = y_{out,1} / E(X_{(n)} - X_{(2)})$ . Przy  $n = 50$  bezwzględne wartości outlierów  $y_{out,1}$ : 0,6; 0,5; 0,45; 0,375; 0,3; 0,2; 0,1 (tabl. I) wybrano z warunku, żeby pierwsza względna wartość  $r_{out,1}$  (w tym przypadku 0,184) była powyżej pierwszej wartości krytycznej  $r_{\alpha,1} = 0,1548$  ( $\alpha = 0,1\%$ ), a następne trzy względne wartości  $r_{out,1}$  (0,153; 0,138; 0,115) znajdowały się pomiędzy poprzednią i aktualną wartościami krytycznymi: 0,1382 dla  $\alpha = 0,2\%$ , 0,1167 dla  $\alpha = 0,5\%$  oraz 0,1007 dla  $\alpha = 1\%$ . Wiarygodność (w %) identyfikacji outlierów przedstawiono w tabl. I. Kolorem szarym zaznaczono strefę poprawnej identyfikacji wszystkich outlierów dla zadanych poziomów istotności  $\alpha$ , odpowiednich wartości krytycznych  $r_{\alpha,1}$  oraz względnych wartości outlierów  $r_{out,1}$ .

Metodę testowania jednocześnie dwóch outlierów zbadano przy ujemnych (–) outlierach w 75% prób oraz przy dodatnich (+) outlierach w 50% prób. To jest w każdej próbie jednocześnie było po 25% obydwóch outlierów. Testowanie wykonano przy tych samych wartościach outlierów  $y_{out,2} = y_{out,1}$  i poziomach istotności. Względne wartości outlierów ( $r_{out,2}$ ) dla tej metody obliczono jako stosunek bezwzględnej wartości outliera ( $y_{out,2}$ ) i wartości oczekiwanej odstępu pomiędzy przedostatnią i drugą obserwacją:  $r_{out,2} = y_{out,2} / E(X_{(n-1)} - X_{(2)})$ . Wiarygodność identyfikacji pojedynczych oraz podwójnych outlierów przedstawiono w tabl. II.

**TABLICA I. Wyniki testowania 50% ujemnych (-) oraz 50% dodatnich (+) outlierów w próbie losowej  $n = 50$  metodą testowania jednego outlieria**

$\alpha \cdot 100\%$ ; $r_{\alpha,1}$		0,1%; 0,1548		0,2%; 0,1382		0,5%; 0,1167		1%; 0,1007	
Liczba outlierów		(-) 50%	(+) 50%	(-) 50%	(+) 50%	(-) 50%	(+) 50%	(-) 50%	(+) 50%
$y_{out,1}$	$r_{out,1}$	Wiarygodność identyfikacji outlierów, %							
0,6	0,184	50,3	50,5	50,2	50,3	50,3	50,4	50,4	50,5
0,5	0,153	40,9	40,8	50,1	50,2	50,3	50,4	50,5	50,5
0,45	0,138	22,1	22,3	43,3	43,2	50,3	50,4	50,5	50,5
0,375	0,115	8,3	8,5	16,8	17,0	41,8	42,0	50,6	50,5
0,3	0,092	3,2	3,2	6,4	6,4	16,0	16,1	32,1	32,0
0,2	0,061	0,81	0,82	1,7	1,7	4,3	4,3	8,8	8,5
0,1	0,031	0,30	0,30	0,58	0,54	1,3	1,2	2,6	2,5
0	0	0,12	0,08	0,20	0,21	0,47	0,50	0,98	0,99

**TABLICA II. Wyniki testowania 75% ujemnych (-) oraz 50% dodatnich (+) outlierów w próbie losowej  $n = 50$  metodą testowania dwóch outlierów**

$\alpha \cdot 100\%$ ; $r_{\alpha,2}$		0,1; 0,1583		0,2; 0,1414		0,5; 0,1193		1; 0,1029	
Liczba outlierów		(-) 75%	(+) 50%	(-) 75%	(+) 50%	(-) 75%	(+) 50%	(-) 75%	(+) 50%
$y_{out,2}$	$r_{out,2}$	Wiarygodność identyfikacji outlierów, %							
0,6	0,188	75,0	50,1	75,0	50,1	75,1	50,2	75,2	50,5
0,5	0,157	60,5	40,0	75,1	50,1	75,1	50,2	75,2	50,4
0,45	0,141	33,7	22,3	63,6	42,8	75,1	50,3	75,2	50,5
0,375	0,117	12,6	8,6	25,4	17,1	62,4	41,6	75,3	50,5
0,3	0,094	4,6	3,2	9,4	6,5	23,7	16,1	36,9	47,4
0,2	0,063	1,3	0,87	2,6	1,7	5,4	4,4	12,7	8,7
0,1	0,031	0,39	0,28	0,77	0,52	1,8	1,3	3,4	2,6
0	0	0,11	0,09	0,24	0,21	0,54	0,52	1,10	1,02

## Analiza wyników i posumowanie

Wyniki badań wykazały bardzo dobrą zbieżność z wynikami uzyskanymi z założeń teoretycznych, dlatego można wnioskować o stosunkowo dobrej skuteczności zaproponowanych metod testowania outlierów.

Metoda testowania jednego outlieria zapewnia poprawne testowanie outlierów, których względna wartość ( $r_{out,1}$ ) jest większa od wartości krytycznych dla odpowiednich poziomów istotności ( $r_{\alpha,1}$ ). Przykładowo: przy względnej wartości outlierów  $r_{out,1} = 0,184$  (pierwszy wiersz tabl. I przy bezwzględnej wartości outlierów  $y_{out,1} = 0,6$ ), która jest większa od wartości krytycznych dla wszystkich poziomów istotności ( $r_{\alpha,1}$ ), testowanie zapewniło identyfikację praktycznie wszystkich outlierów. Częstkowa zmienność wiarygodności testowania (analogicznie i w następnych wynikach) związana jest z naturalną wariancją obserwacji wokół ich wartości oczekiwanych. Przy obliczaniu względnych wartości outlierów  $r_{out,1}$  podstawą była wartość oczekiwana odstępów pomiędzy drugą i ostatnią obserwacją, natomiast podczas testowania te odstępów są wartościami losowymi. Przy względnej wartości outlierów  $r_{out,1} = 0,153$ , która jest mniejsza od wartości krytycznej dla poziomu istotności 0,1% i większa od wartości krytycznych dla reszty poziomów istotności (0,2%, 0,5%, 1%), testowanie zapewniło identyfikację praktycznie wszystkich outlierów dla tych poziomów istotności, a dla poziomu istotności 0,1%, dla którego wartość graniczna  $r_{1,1} = 0,1548$  jest większa od  $r_{out,1} = 0,153$  zidentyfikowano około 41% outlierów z 50%.

Metoda testowania jednocześnie dwóch outlierów zapewnia poprawne testowanie pod warunkiem, że względna wartość outlierów ( $r_{out,2}$ ) jest większa od wartości krytycznych ( $r_{\alpha,2}$ ) dla odpowiednich poziomów istotności ( $\alpha$ ), o czym świadczą wyniki przedstawione w tabl. II.

Natomiast wykorzystywanie wartości krytycznych metody testowania jednego outlieria do testowania jednocześnie dwóch outlierów nie zapewnia poprawnej identyfikacji wszystkich outlierów (tylko na poziomie 80%).

Zaproponowane metody są bardzo przydatne do komputerowej realizacji, ponieważ wszystkie operacje związane z testowaniem outlierów oraz obliczaniem wyniku pomiaru wraz z jego standardową i rozszerzoną niepewnością wykonywane są na podstawie prostych i jednoznacznych zależności analitycznych.

## LITERATURA

- Burke S. "Missing Values, Outliers, Robust Statistics & Non-parametric Methods". *Statistics and data analysis*. LC+GC Europe Online Supplement. (2001): pp. 19–24.
- Hawkins D. "Identification of Outliers". London: Chapman and Hall, 1980.
- Novitski P.V., Zograf I.A. "Evaluation of measurement result errors" (in Russian). Moscow: Energoatomizdat, 1985.
- Dixon W.J. "Analysis of extreme values". *Annals of Mathematical Statistics*. 21, (1950): pp. 488–506.
- Grubbs F. "Procedures for detecting outlying observations in samples". *Technometrics*. 11 (1969): pp. 1–21.
- Hampel F.R., Ronchetti E.M., Rousseeuw P.J., Stahel W.A. "Robust Statistics. The Approach Based on Influence Functions". New York: Wiley and Sons, 1986.
- Lehmann E.L. "Theory of point estimation". New York: Wiley, 1983.
- Fisz M. "Probability Theory and Mathematical Statistics". London: John Wiley & Sons, 1963.