

# Dynamika podwójnego wahadła fizycznego o zmiennej masie we współrzędnych bezwymiarowych

## Dynamics of a double physical pendulum with variable mass in dimensionless coordinates

RAFAŁ KWIATKOWSKI  
TADEUSZ J. HOFFMANN  
ANDRZEJ KOŁODZIEJ  
GRZEGORZ DOMEK\*

DOI: 10.17814/mechanik.2016.11.525

W artykule podjęto próbę opisu matematycznego i analizy zjawiska wymiany masy pomiędzy członami podwójnego wahadła fizycznego i jego wpływu na dynamikę układu. W badanym układzie wraz z upływem czasu następowało – pod wpływem grawitacji – zmniejszenie masy górnego członu i jednocześnie zwiększenie masy dolnego członu wahadła. Całkowita masa układu nie zmieniała się. Na potrzeby analizy wprowadzono bezwymiarowy czas i bezwymiarowe parametry, co pozwoliło na przedstawienie równań ruchu w postaci bezwymiarowej. Wykazano, że zmiana masy w układzie ma istotny wpływ na jego dynamikę. Wzrost masy dolnego członu wahadła zmniejsza amplitudę drgań. Obliczenia numeryczne przeprowadzono w programie Mathematica.

**SŁOWA KLUCZOWE:** wymiana masy, podwójne wahadło, chaos

*The article concerns considerations, whose the theme is to try to mathematical description and analysis of the study of the phenomenon of mass exchange between the members of double physical pendulum and its impact on the dynamics of the whole system. In the analyzed system, with time, under the influence of gravity, the mass of the upper member of pendulum decreases and the mass of the lower member of pendulum increases. The total mass of the system doesn't change. For the analysis introduced dimensionless time and dimensionless parameters, which allows the presentation of the equations of motion in dimensionless form. It has been shown that the change of mass in the system has a significant impact on the dynamics. The increase in mass of the lower member reduces the amplitude of vibration of the pendulum. The numerical calculations were performed in the Mathematica package.*

**KEYWORDS:** variable mass, double pendulum, chaos

Artykuł stanowi kontynuację tematyki podjętej w pracach [4–9]. Wcześniejsze badania koncentrowały się na analizie wpływu zjawiska wymiany masy pomiędzy członami podwójnego wahadła (zarówno fizycznego, jak i matematycznego) na dynamikę układu. Wyniki badań przedstawiano w postaci przebiegów czasowych dla wielu różnych warunków początkowych ruchu. Celem niniejszej pracy jest próba opisu matematycznego zjawiska wymiany masy pomiędzy członami podwójnego wahadła fizycznego we współrzędnych bezwymiarowych oraz analiza wpływu tego zjawiska na dynamikę układu.

Zainteresowanie układami o zmiennej masie ma źródło w poszukiwaniu efektów fizycznych (mechanicznych)

\* Mgr inż. Rafał Kwiatkowski (kwiatkowski-rafal@o2.pl), prof. dr hab. Tadeusz J. Hoffmann (tadeuszhoffmann@wp.pl), dr hab. inż. Andrzej Kołodziej (a.kolodziej@ip.pwsz.kalisz.pl) – PWSZ w Kaliszu; dr hab. inż. Grzegorz Domek (gdomek@ukw.edu.pl) – Uniwersytet Kazimierza Wielkiego w Bydgoszczy

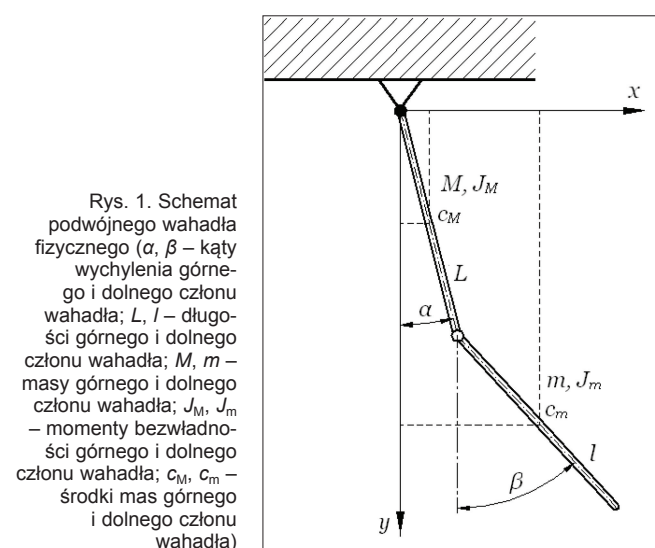
możliwych do wykorzystania w budowie tłumików drgań. Większość badań eksperymentalnych w tym zakresie zakończyła się bez większych sukcesów, o czym świadczy m.in. poziom dostępnych na rynku produktów. Ze względu na ochronę patentową brakuje też publikacji dotyczących tych badań.

Jednym z powszechnych systemów zmniejszających amplitudę drgań, stosowanych głównie w budowie wieżowców i mostów oraz w branży motoryzacyjnej, jest TMD (*tuned mass damper*) – masowy tłumik drgań. Taki układ składa się m.in. z ruchomej masy, sprężyn i tłumika wiskotycznego, a opis jego badań można znaleźć w pracy [12].

W tej sytuacji pojawiło się zapotrzebowanie na prace teoretyczne z zakresu modelowania dynamiki układów o zmiennej masie.

Podwójne wahadło fizyczne o zmiennej masie jest prostym układem dynamicznym, składającym się z dwóch członów połączonych ze sobą przegubowo (rys. 1). W artykule przedstawiono wyniki badań dynamiki takiego wahadła dla dwóch zestawów warunków początkowych różniących się jednym parametrem:  $\beta$  – kątem wychylenia dolnego członu wahadła. Pozostałe warunki początkowe układu, tj.:

- $L$  – długość górnego członu wahadła,
  - $l$  – długość dolnego członu wahadła,
  - $M$  – masa górnego członu wahadła,
  - $m$  – masa dolnego członu wahadła,
  - $\alpha$  – kąt wychylenia górnego członu wahadła,
  - $\alpha'$  – prędkość uogólniona górnego członu wahadła,
  - $\beta'$  – prędkość uogólniona dolnego członu wahadła,
  - $\lambda$  – współczynnik wymiany masy,
- były identyczne w obu symulacjach.



Rys. 1. Schemat podwójnego wahadła fizycznego ( $\alpha, \beta$  – kąty wychylenia górnego i dolnego członu wahadła;  $L, l$  – długości górnego i dolnego członu wahadła;  $M, m$  – masy górnego i dolnego członu wahadła;  $J_M, J_m$  – momenty bezwładności górnego i dolnego członu wahadła;  $c_M, c_m$  – środki mas górnego i dolnego członu wahadła)

Przyjmuje się, że masa całkowita wahadła podwójnego jest stała, jednak następuje przepływ masy pomiędzy członami.

W warstwie matematycznej wykorzystano klasyczny formalizm równań Lagrange'a mechaniki analitycznej dla układu o dwóch stopniach swobody z więzami gładkimi holonomicznymi oraz fakt, że siła ciężkości jest siłą potencjalną. Do obliczeń numerycznych i graficznej prezentacji wyników zastosowano program Mathematica 6 firmy Wolfram Research.

### Bezwymiarowa postać równań ruchu

Na podstawie [11] do układu równań nieliniowych, opisujących wahadło o zmiennej masie (szczegółowo omówione w pracach [8, 9]), wprowadzono:

- bezwymiarowe parametry:

$$\omega^2 = \frac{g}{L}, \quad \Omega^2 = \frac{g}{l}, \quad \chi = \frac{\omega^2}{\Omega^2} = \frac{l}{L}$$

- bezwymiarowy czas:

$$\tau = \omega \cdot t = \sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t \rightarrow t = \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \tau, \quad dt = \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot d\tau$$

- pochodne czasowe:

$$\frac{d}{dt}(\cdot) = \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \frac{d}{d\tau}(\cdot), \quad \frac{d^2}{dt^2}(\cdot) = \frac{L}{g} \cdot \frac{d^2}{d\tau^2}(\cdot)$$

- masę bezwymiarową:

$$\mu = \frac{m}{M+m} = \frac{m}{M_0+m_0} \rightarrow m = \mu(M_0+m_0)$$

Stąd wynika, że:

$$m' = \frac{dm}{dt} = (M_0+m_0) \frac{d}{dt} \mu = (M_0+m_0) \sqrt{\frac{g}{L}} \frac{d}{d\tau} \mu$$

$$\frac{m'}{m} = \frac{(M_0+m_0) \sqrt{\frac{g}{L}} \mu'}{(M_0+m_0) \mu} = \sqrt{\frac{g}{L}} \frac{\mu'}{\mu}$$

Po odpowiednich przekształceniach otrzymano bezwymiarową postać równań nieliniowych podwójnego wahadła fizycznego o zmiennej masie:

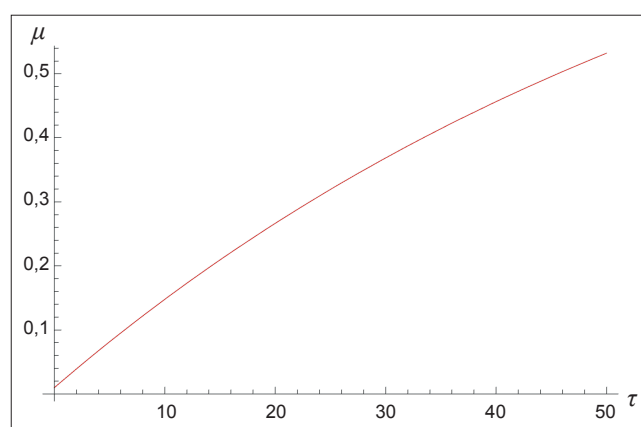
$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha''(1-2\mu) + \frac{3}{4} \beta'' \chi \mu \cos(\alpha-\beta) + 2\alpha' \mu' + \\ + \frac{3}{4} \beta' \mu' \chi \cos(\alpha-\beta) - \frac{3}{4} \beta' (\alpha'-\beta') \chi \mu \sin(\alpha-\beta) + \\ + \frac{3}{4} \alpha' \beta' \chi \mu \sin(\alpha-\beta) + \frac{1}{2} (1-\mu) \sin \alpha = 0 \\ \\ \alpha'' \cos(\alpha-\beta) + \frac{13}{3} \beta'' \chi + \frac{13}{3} \beta' \chi \frac{\mu'}{\mu} + \\ + \alpha' \frac{\mu'}{\mu} \cos(\alpha-\beta) - \alpha'^2 \sin(\alpha-\beta) + \\ + 2 \sin \beta = 0 \end{array} \right.$$

### Wyniki badań

Badanie miało umożliwić analizę wpływu zmiany wychylenia początkowego dolnego członu wahadła ( $\beta$ ) na dynamikę układu podwójnego wahadła fizycznego o zmiennej masie. Zadane wychylenie dolnego członu wahadła  $\beta_0$  w pierwszej symulacji wynosiło 0,1 rad, a w drugiej – 0,2 rad. Pozostałe wartości początkowe układu przedstawiono w tablicy.

TABLICA. Zadane wartości początkowe układu

L, m	l, m	M <sub>0</sub> , kg	m <sub>0</sub> , kg	χ	μ <sub>0</sub>
1	1	10	0,10	1	0,01
α <sub>0</sub>	β <sub>0</sub>	α' <sub>0</sub>	β' <sub>0</sub>	λ	
0	0,1	0	0	0,015	
	0,2				



Rys. 2. Wykres zmiany masy bezwymiarowej  $\mu$  podczas procesu

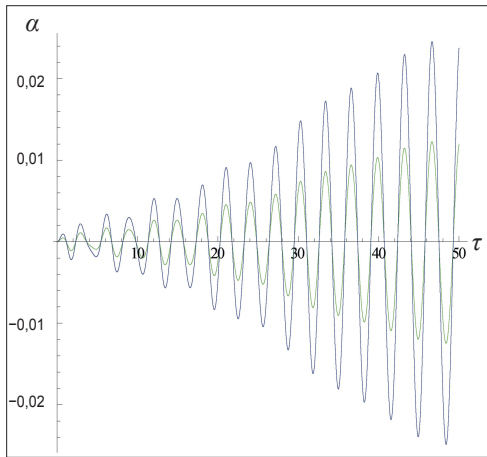
Na rys. 2 pokazano zmianę masy bezwymiarowej  $\mu$  dla procesu o czasie wynoszącym  $\tau = 50$ .

Symulacje przebiegu współrzędnych oraz prędkości uogólnionych poszczególnych członów wahadła przedstawiono na wspólnych dla obu procesów wykresach. Wartości wychylenia górnego członu wahadła (rys. 3) zmieniają się od 0 do 0,012 w pierwszej symulacji oraz od 0 do 0,024 w drugiej symulacji. W obu przypadkach amplituda drgań podczas całego procesu stale rośnie.

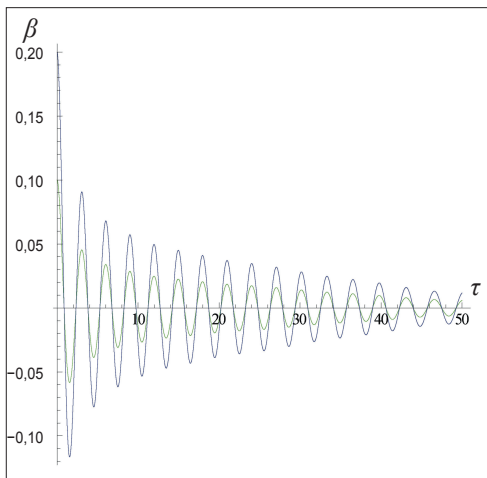
Przebiegi symulacji współrzędnej uogólnionej dla dolnego członu wahadła (rys. 4) wskazują, że w miarę zmniejszania się masy górnego członu wahadła i jednoczesnego zwiększania się masy dolnego członu następuje tłumienie drgań członu dolnego. Wielkość amplitudy drgań w pierwszej symulacji zmieniała się od 0,1 (zadanej początkowej wartości) do 0,01 pod koniec procesu, natomiast w drugiej symulacji – od 0,2 (zadanej początkowej wartości) do 0,015 pod koniec procesu.

Wykresy obrazujące prędkości uogólnione górnego członu wahadła  $\alpha'$  (rys. 5) dla pierwszej symulacji kształtują się w zakresie od 0 do 0,022, natomiast dla drugiej symulacji od 0 do 0,045. Podczas procesu amplituda prędkości uogólnionych (dla obu symulacji) stale rośnie.

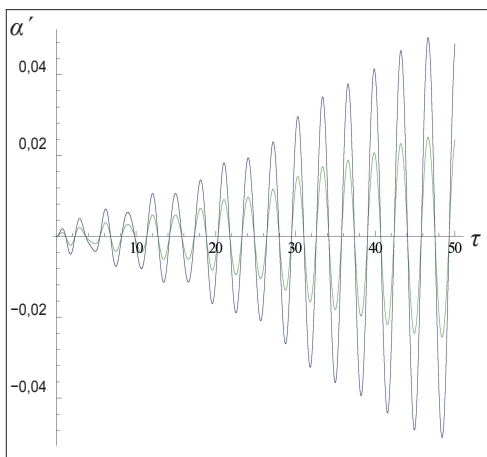
Prędkość uogólniona dolnego członu wahadła (rys. 6) w obu symulacjach osiąga maksimum na samym początku procesu. W pierwszej symulacji następuje skok od zadanej początkowej wartości 0 do 0,17, a w drugiej symulacji – od 0 do 0,32, potem zaś amplituda prędkości uogólnionej zmniejsza się w trakcie procesu (wraz ze wzrostem masy dolnego członu wahadła następuje tłumienie prędkości) i pod koniec osiąga odpowiednio: 0,02 w pierwszej i 0,03 w drugiej symulacji.



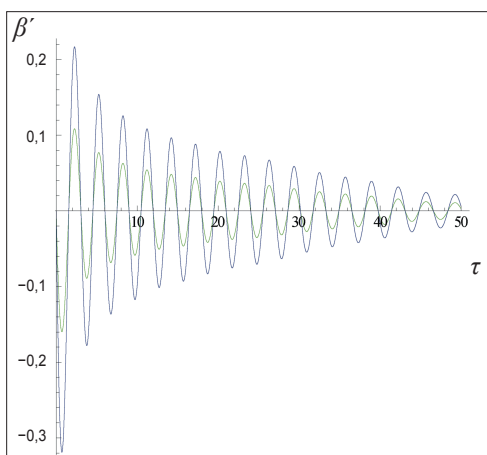
Rys. 3. Wykresy symulacji współrzędnych uogólnionych górnego członu wahadła  $\alpha$ . Kolor zielony dotyczy pierwszej symulacji ( $\beta_0 = 0,1$  rad), a kolor niebieski – drugiej symulacji ( $\beta_0 = 0,2$  rad)



Rys. 4. Wykresy symulacji współrzędnych uogólnionych dolnego członu wahadła  $\beta$ . Kolor zielony dotyczy pierwszej symulacji ( $\beta_0 = 0,1$  rad), a kolor niebieski – drugiej symulacji ( $\beta_0 = 0,2$  rad)



Rys. 5. Wykresy symulacji prędkości uogólnionych górnego członu wahadła  $\alpha'$ . Kolor zielony dotyczy pierwszej symulacji ( $\beta_0 = 0,1$  rad), a kolor niebieski – drugiej symulacji ( $\beta_0 = 0,2$  rad)



Rys. 6. Wykresy symulacji prędkości uogólnionych dolnego członu wahadła  $\beta'$ . Kolor zielony dotyczy pierwszej symulacji ( $\beta_0 = 0,1$  rad), a kolor niebieski – drugiej symulacji ( $\beta_0 = 0,2$  rad)

## Wnioski

Głównym i najważniejszym wnioskiem z przeprowadzonych badań jest potwierdzenie, że zjawisko przepływu masy może być wykorzystane do tłumienia drgań.

Dynamika układu o zmiennej masie różni się znacząco od przebiegu dla układu o stałej masie, przy czym gdy zmiana masy w układzie jest stosunkowo niewielka w porównaniu z całkowitą masą układu, w badaniu dynamiki można ten fakt pominąć. Z kolei w systemach, w których zachodzi znaczna wymiana masy, zwłaszcza w krótkim czasie, należy uwzględnić ten proces w badaniu dynamiki – w przeciwnym razie wszelkie przewidywane odpowiedzi układu będą dalekie od jego rzeczywistego zachowania [3].

Otrzymane wyniki otwierają nowe pola badawcze, zwłaszcza inspirowane praktycznymi zastosowaniami opisanymi w pracach [2, 10]. W tym kontekście ważne będzie opracowanie modelu wahadła fizycznego o dowolnym momencie bezwładności i porównanie go z modelem wahadła matematycznego, a także przebadanie przebiegów procesów wywołanych siłą wymuszającą przykładową do górnego bądź dolnego członu wahadła – pozwoli to na stwierdzenie, w jakim stopniu badane modele opisują rzeczywiste procesy techniczne.

Analizowane wahadło podwójne o zmiennej masie ma skłonność do ruchu chaotycznego (opis zjawiska chaotycznego ruchu wahadeł można odnaleźć w pracach [1, 11]) – widać to zwłaszcza podczas obserwacji ruchu górnego członu wahadła. Przedstawione wyniki badań były bardzo wrażliwe na warunki początkowe. Jednocześnie stwierdzenie, że w tym wypadku występuje ruch chaotyczny, nie jest jednak możliwe tylko i wyłącznie na podstawie przeprowadzonej analizy. W tym celu należałoby wykonać dalsze badania z uwzględnieniem wykresów bifurkacyjnych, maksymalnych wykładników Lapunowa, a także map Poincarégo.

## LITERATURA

1. Awrejcewicz J., Holické M.M. "Analytical prediction of chaos in rotated Froude pendulum". *Nonlinear Dynamics*. 47, 3–24 (2007).
2. Bąkowski A., Radziszewski L., Żmindak M. "Determining the polytropic exponent of the process occurring during the working cycle of a diesel". *Procedia Engineering*. Vol. 136 (2016): pp. 220–226.
3. Eke F.O., Mao T.C. "On the dynamics of variable mass systems". *International Journal of Mechanical Engineering Education*. Vol. 30, No. 2 (2002): pp. 123–137.
4. Hoffmann T.J., Chudzicka-Adamczak M., Kwiatkowski R. "Fundamentals of dynamics of double pendulum with changing mass". *Machine Modeling and Simulations*. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, ISBN: 978-83-923315-2-0, 2012: pp. 403–410.
5. Hoffmann T.J., Kwiatkowski R. "Wpływ wymiany masy na dynamikę układu podwójnego wahadła". *Wybrane problemy naukowo-badawcze mechaniki i inżynierii materiałowej*, praca zbiorowa pod red. J. Wernika. Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej Filia w Płocku, ISBN: 978-83-62081-19-6, 2013: s. 287–298.
6. Kwiatkowski R. "Movement of double mathematical pendulum with variable mass". *Machine Dynamics Research*. Vol. 38, No. 2 (2014): pp. 47–58.
7. Kwiatkowski R. "Vibration damping in the double mathematical pendulum with variable mass". *Machine Dynamics Research*. Vol. 38, No. 4 (2014): pp. 23–32.
8. Kwiatkowski R. "Analiza dynamiki podwójnego wahadła matematycznego i fizycznego o zmiennej masie". *Inżynieria wytwarzania*, praca zbiorowa pod red. D. Kasprzaka, A. Mrowca i K. Talaśki. Kalisz: Wydawnictwo Uczelniane PWSZ w Kaliszu, ISBN 978-83-64090-41-7, 2014: s. 73–82.
9. Kwiatkowski R. "Dynamic analysis of double pendulum with variable mass and initial velocities". *Procedia Engineering*. Vol. 136 (2016): pp. 175–180.
10. Mocilan M., Żmindak M., Pastorek P. "Dynamic analysis of fuel tank". *Procedia Engineering*. Vol. 136 (2016): pp. 45–49.
11. Sado D. "Drgania regularne i chaotyczne w wybranych układach z wahadłami". Warszawa: WNT, 2010.
12. Weber F., Maślanka M. "Frequency and damping adaptation of a TMD with controlled MR damper". *Smart Materials and Structures*. Vol. 21, No. 5 (2012).