XVIII Międzynarodowa Szkoła Komputerowego Wspomagania Projektowania, Wytwarzania i Eksploatacji

Prof. dr hab. inż. Bogdan ZYGMUNT Dr inż. Krzysztof MOTYL Wojskowa Akademia Techniczna

Dr inż. Edward OLEJNICZAK Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych

Mgr inż. Tomasz RASZTABIGA Mesko S.A. Skarżysko-Kamienna

EKSPERYMENTALNA WERYFIKACJA MODELU MATEMATYCZNEGO LOTU RAKIETY NADDŹWIĘKOWEJ

Streszczenie: Zbudowano model matematyczno-fizyczny rakietowego pocisku naddźwiękowego z uwzględnieniem charakterystyk masowobezwładnościowych, a następnie zaimplementowano go do programu symulacyjnego MathCAD14. Uzyskano analizę numeryczną dynamiki lotu pocisku rakietowego, co pozwoliło określić podstawowe parametry balistyczne pocisku, takie jak zasięg, pułap, prędkość i przyspieszenie. Na tej podstawie sformułowano program badań poligonowych wyprodukowanych modeli rakiet. Przeprowadzono wstępne badania balistyczne rakiet na poligonie i uzyskano zadowalającą zgodność parametrów zmierzonych eksperymentalnie i uzyskanych z symulacji komputerowych.

EXPERIMENTAL VERIFICATION OF MATHEMATICAL MODEL OF FLIGHT SUPERSONIC ROCKET

Abstract: A mathematical-physical model of a supersonic missile was built, taking into account the mass and inertia properties. The model was implemented in a MathCAD14 simulation program. A numerical analysis of the missile ballistics was conducted and basic parameters were determined: range, altitude, velocity and acceleration, which enabled a test range program for manufactured missile models to be drawn up. Initial flight tests of missiles were carried out at the test range. Satisfactory accordance of experimental and theoretical dynamic parameters of the missile under study was obtained.

Slowa kluczowe: model matematyczny, symulacja komputerowa Keywords: mathematical model, computer simulation

1. WPROWADZENIE

W tracie projektowania rakietowych pocisków naddźwiękowych wykorzystuje się programy komputerowe mające na celu wstępne określenie parametrów balistycznych (prędkość, przyspieszenie, zasięg) oraz optymalizację konstrukcji pocisków. Jednym z popularniejszych uniwersalnych programów do prognozowania własności balistycznych szybkich obiektów jest PRODAS, licencjonowany produkt firmy Arrow Tech Inc., USA [10]. Pomimo istnienia

XVIII Międzynarodowa Szkoła Komputerowego Wspomagania Projektowania, Wytwarzania i Eksploatacji

wielu komercyjnych programów komputerowych do symulacji lotu obiektów naddźwiękowych, nadal tworzone są nowe programy uwzględniające aspekty dynamiki różnorodnych kształtów geometrycznych pocisków oraz zajmujące się problemem stabilności aerodynamicznej.

Wykorzystując wieloletnie doświadczenia Wojskowej Akademii Technicznej w projektowaniu amunicji oraz badaniach balistyki zewnętrznej pocisków [3-5], autorzy pracy stworzyli własny oryginalny program komputerowy do oceny parametrów balistycznych pocisków naddźwiękowych. Do analizy własności balistycznych zbudowano model matematyczno-fizyczny rakietowego pocisku naddźwiękowego z uwzględnieniem charakterystyk masowo-bezwładnościowych, a następnie zaimplementowano go do programu symulacyjnego MathCAD14 [12]. Otrzymano analizę numeryczną balistyki pocisku sformułowanie rakietowego, co umożliwiło programu badań poligonowych wyprodukowanych modeli rakiet.

W pracy przedstawiono również wyniki wstępnych badań dynamiki rakiety w warunkach poligonowych. Uzyskane eksperymentalne dane parametrów lotu z badań poligonowych posłużyły do weryfikacji poprawności wyników symulacji komputerowych, co można uznać za weryfikację zbudowanego modelu matematyczno-fizycznego pocisku rakietowego.

2. MODEL FIZYCZNY POCISKU RAKIETOWEGO

W procesie opracowywania modelu fizycznego pocisku rakietowego uwzględniono cechy obiektu latającego mające istotny wpływ na analizowane zjawisko. Opracowanie modelu fizycznego pocisku wymagało przede wszystkim:

- 1. przyjęcia układów współrzędnych niezbędnych do opisu ruchu pocisku oraz sił na niego działających;
- 2. określenia struktury pocisku, czyli:
 - charakterystyk geometrycznych,
 - charakterystyk masowo-bezwładnościowych;
- 3. wyznaczenia składowych sił zewnętrznych i momentów tych sił działających na pocisk wraz z funkcjami je opisującymi, czyli:
 - siły ciężkości i jej momentu,
 - siły aerodynamicznej i jej momentu,
 - siły Coriolisa i jej momentu;
- 4. określenia charakterystyk ośrodka ruchu obiektu, tzn.: gęstości, lepkości, temperatury, ciśnienia w zależności od wysokości lotu.



Rys. 1. Szkic badanego naddźwiękowego pocisku rakietowego

XVIII Międzynarodowa Szkoła Komputerowego Wspomagania Projektowania, Wytwarzania i Eksploatacji

W tablicy 1 zamieszczono podstawowe charakterystyki geometryczne i masowo--bezwładnościowe pocisku rakietowego.

Tablica	1. Zest	awien	ie wy	branych	charal	cterysty	yk ge	eometr	ycznycł	1 pocisku
							/ O'		, <u></u> ,	

Charakterystyki masowo-bezwładnościowe pocisku rakietowego	Wartość liczbowa		
Masa startowa pocisku rakietowego m ₀ [kg]	69,0		
Długość pocisku rakietowego L _p [m]	3,40		
Średnica kadłuba I stopnia d [m]	0,170		
Średnica kadłuba II stopnia d [m]	0,091		
Pole powierzchni przekroju poprzecznego kadłuba S _k [m ²]	0,0023		
Rozpiętość stateczników L _{st} [m]	0,40		

3. MODEL MATEMATYCZNY POCISKU RAKIETOWEGO

Równania stanowiące model matematyczny pocisku rakietowego zostały wyprowadzone w oparciu o twierdzenia zmiany pędu i krętu ciała o zmiennej masie. Skalarne równania opisujące pełny ruch przestrzenny pocisku rakietowego zamieszczono poniżej:

$$m \cdot \frac{dV}{dt} = F \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta - P_x - m \cdot g \cdot \sin \gamma$$
(1)

$$m \cdot V \cdot \cos \gamma \cdot \frac{d\kappa}{dt} = F \cdot (\sin \alpha \cdot \sin \mu_a + \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \mu_a) + P_y \cdot \cos \mu_a + P_z \cdot \sin \mu_a \quad (2)$$

$$-m \cdot V \cdot \frac{d\gamma}{dt} = -F \cdot (\cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\mu_a + \sin\alpha \cdot \cos\mu_a) + P_y \cdot \sin\mu_a - P_z \cdot \cos\mu_a + m \cdot g \cdot \cos\gamma \quad (3)$$

$$\frac{dx_g}{dt} = V \cdot \cos \gamma \cdot \cos \kappa \tag{4}$$

$$\frac{dy_g}{dt} = V \cdot \cos \gamma \cdot \sin \kappa \tag{5}$$

$$\frac{dz_g}{dt} = -V \cdot \sin \gamma \tag{6}$$

$$I_x \cdot \frac{dp}{dt} - (I_y - I_z) \cdot q \cdot r = L \tag{7}$$

$$I_{y} \cdot \frac{dq}{dt} - (I_{z} - I_{x}) \cdot p \cdot r = M$$
(8)

$$I_z \cdot \frac{dr}{dt} - (I_x - I_y) \cdot p \cdot q = N$$
(9)

$$\frac{d\Theta}{dt} = q \cdot \cos \Phi - r \cdot \sin \Phi \tag{10}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = p + \tan\Theta \cdot (q \cdot \sin\Phi + r \cdot \cos\Phi) \tag{11}$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = (q \cdot \sin \Phi + r \cdot \cos \Phi) \cdot \sec \Theta, \qquad (12)$$

gdzie: g

– przyspieszenie ziemskie,

m – masa pocisku rakietowego,

XVIII Międzynarodowa Szkoła Komputerowego Wspomagania Projektowania, Wytwarzania i Eksploatacji

V	_	prędkość środka masy obiektu względem ziemi,
ρ	_	gęstość powietrza,
F	_	składowa ciągu pocisku rakietowego wzdłuż osi x w układzie 0xyz,
α, β	_	odpowiednio: kąt natarcia i kąt ślizgu,
γ, κ	_	odpowiednio: kąt pochylenia i odchylenia wektora prędkości obiektu,
μ_a	_	kąt przechylenia układu Oxayaza,
p, q, r	_	składowe prędkości kątowej Ω rakiety w układzie 0xyz odpowiednio wzdłuż
		osi x, y oraz z,
I _x , I _y ,	I _z –	momenty bezwładności rakiety względem osi: x, y, z układu współrzędnych zwiazanego z obiektem 0xyz
L, M,	N –	odpowiednio: moment przechylający, pochylający i odchylający względem
		środka masy pocisku rakietowego,
P_x, P_y	, P _z –	odpowiednio: siła oporu, siła boczna i siła nośna,
Θ, Ψ,	Φ –	odpowiednio: kąt pochylenia, odchylenia i przechylenia obiektu latającego.

Dodatkowo należy uzupełnić ten układ równań różniczkowych zależnościami geometrycznymi miedzy wprowadzonymi układami współrzędnych, równaniami dodatkowymi opisującymi współczynniki aerodynamiczne sił i momentów aerodynamicznych oraz funkcjami zmiany masy i ciągu silnika rakietowego.

4. ANALIZA NUMERYCZNA PODSTAWOWYCH CHARAKTERYSTYK DYNAMICZNYCH I ZASIĘGOWYCH POCISKU RAKIETOWEGO

Zbudowany model matematyczno-fizyczny pocisku rakietowego został zaimplementowany obliczeniowym MathCAD14. Wykorzystujac pakiecie opracowany algorytm W i komputerowy programu symulacyjny, wyznaczono wybrane charakterystyki kinematyczne pocisku rakietowego. Na rysunkach 2-4 przedstawiono wykresy podstawowych charakterystyk fizycznych (prędkość, pułap) dla pocisku rakietowego zasięg, wystrzeliwanego z wyrzutni pod różnymi kątami.



Rys. 2. Pułap i zasięg pocisku rakietowego w funkcji kąta strzału

MECHANIK 7/2014 XVIII Międzynarodowa Szkoła Komputerowego Wspomagania Projektowania, Wytwarzania i Eksploatacji



Rys. 3. Zależność położenia pocisku w funkcji czasu dla różnych kątów strzału



Rys. 4. Przebieg prędkości pocisku w funkcji czasu dla różnych kątów strzału

Przeprowadzono również symulacje numeryczne takich charakterystyk dynamicznych lotu pocisku, jak współczynnik oporu aerodynamicznego (c_x) oraz siła oporu aerodynamicznego (F) w funkcji czasu lotu oraz w funkcji prędkości pocisku wyrażonej w jednostkach Macha (v_M). Zależności te porównano z zależnościami uzyskanymi z badań eksperymentalnych dla kąta strzału pocisku rakietowego wynoszącego 10°.

5. BADANIA DOŚWIADCZALNE

Badania dynamiczne pocisku rakietowego wykonano na poligonie morskim. Pocisk wystrzelono z wyrzutni rurowej umieszczonej na platformie umożliwiającej zmianę kąta podniesienia wyrzutni. Na rysunku 5 przedstawiono moment startu pocisku z wyrzutni nachylonej pod kątem 10°. Do pomiaru prędkości pocisku zastosowano radar dopplerowski Weibell z anteną typu SL 300031, ustawiony w osi przewidywanej trajektorii lotu. Na podstawie danych zarejestrowanych przez radar dopplerowski sporządzono zależność prędkości pocisku rakietowego od czasu v=f(t) (rys. 6). Na tym samym wykresie umieszczono przebieg prędkości pocisku w czasie otrzymany w symulacji komputerowej. Przy kącie strzału 10°, maksymalna wysokość lotu wyniosła 600 m, co przy zasięgu ok. 9 km można uznać w przybliżeniu za tor prostoliniowy. Zgodność ilościowa i jakościowa obu przebiegów na rys. 6 jest w pełni zadowalająca.



Rys. 5. Moment startu pocisku rakietowego z wyrzutni ustawionej pod kątem 10°

Lot aktywny z pracującym silnikiem rakietowym trwał ok. 2,7 sekundy. Po ustaniu ciągu, pocisk rakietowy wykonywał lot balistyczny zachowując stałą masę (ok. 40 kg). Po zróżniczkowaniu eksperymentalnej zależności v=f(t) (rys. 6), otrzymamy zależność przyspieszenia w funkcji czasu a=f(t). Po ustaniu pracy napędu rakietowego, pocisk można traktować jako obiekt o stałej masie. Na rysunku 7 zamieszczono przebiegi przyspieszenia pocisku rakietowego otrzymane z danych eksperymentalnych oraz obliczone teoretycznie. Zgodność przebiegów na odcinku lotu balistycznego pocisku jest pełna.

Po scałkowaniu eksperymentalnej zależności v=f(t) otrzymamy wykres drogi przebytej przez pocisk w czasie, co przedstawiono na rys. 8 dla danych eksperymentalnych i obliczonych teoretycznie. Uzyskano dobrą zgodność obu przebiegów.

W czasie lotu na pocisk działała siła czołowego oporu aerodynamicznego zależna od prędkości. Profil zależności siły oporu aerodynamicznego od czasu F=f(t) będzie podobny do zależności v=f(t), co przedstawiono na rys. 9. Funkcję F=f(t) można również przedstawić jako zależność siły oporu aerodynamicznego od prędkości pocisku rakietowego F=f(v). Na rys. 10 przedstawiono tę zależność dla danych eksperymentalnych oraz obliczonych w symulacji komputerowej. Przebiegi są charakterystyczne dla tej funkcji i zbliżone co do wartości liczbowych z dokładnością ok. 7%.



Rys. 6. Prędkość pocisku w funkcji czasu (obliczenia i eksperyment) dla strzału pod kątem 10°



Rys. 7. Przebiegi przyspieszenia pocisku w funkcji czasu (obliczenia i eksperyment) dla strzału pod kątem 10°

XVIII Międzynarodowa Szkoła Komputerowego Wspomagania Projektowania, Wytwarzania i Eksploatacji



Rys. 8. Porównanie położenia pocisku w funkcji czasu (obliczenia i eksperyment) dla strzału pod kątem 10°



Rys. 9. Zmiana siły oporu czołowego w funkcji czasu lotu



Rys. 10. Zmiana siły oporu czołowego w funkcji prędkości pocisku rakietowego wyrażonej liczbą Macha



Rys. 11. Zależność współczynnika oporu czołowego od prędkości wyrażonej liczbą Macha

Uwzględniając siły i odnosząc je do prędkości, można sporządzić wykres współczynnika oporu i porównać go ze współczynnikiem teoretycznym. Na rysunku 11 przedstawiono zależność współczynnika oporu czołowego od prędkości wyrażonej liczbą Macha.

6. PODSUMOWANIE I WNIOSKI KOŃCOWE

Opracowano model matematyczno-fizyczny badanego pocisku rakietowego, który został zaimplementowany w pakiecie obliczeniowym MathCAD14. Wykorzystując opracowany algorytm i komputerowy program symulacyjny, wyznaczono wybrane charakterystyki kinematyczne pocisku rakietowego. Wyniki symulacji komputerowych przedstawiono w postaci wykresów podstawowych charakterystyk kinematycznych (prędkość, zasięg, pułap) dla pocisku rakietowego wystrzeliwanego z wyrzutni pod różnymi kątami.

Przeprowadzono również symulacje zależności takich parametrów dynamicznych, jak siła oporu aerodynamicznego i współczynnik oporu w funkcji prędkości badanego pocisku rakietowego. Wyniki pracy wykazały wysoką przydatność pakietu obliczeniowego MathCAD do wyznaczania charakterystyk dynamicznych naddźwiękowych obiektów.

Na podstawie wyników wstępnych badań poligonowych badanego pocisku rakietowego porównano dane eksperymentalne z wynikami symulacji komputerowych. Uzyskano wysoką zgodność eksperymentalnych i teoretycznych charakterystyk kinematycznych (prędkość, zasięg, pułap) oraz zadowalającą zgodność wyników dynamicznych (siła oporu i współczynnik oporu aerodynamicznego.

LITERATURA

- [1] Björck A., Dahlquist G.: *Metody numeryczne*, PWN, Warszawa, 1983.
- [2] Gacek J.: Modelowanie i badanie dynamicznych właściwości obiektów balistycznych, WAT, Warszawa, 1992.
- [3] Gacek J.: Balistyka zewnętrzna, cz. I. Modelowanie zjawisk balistyki zewnętrznej i dynamiki lotu, Warszawa, 1997.
- [4] Gacek J.: Balistyka zewnętrzna, cz. II. Analiza dynamicznych właściwości obiektów w locie, WAT, Warszawa, 1998.
- [5] Gacek J.: Modelowanie i badania dynamicznych własności obiektów balistycznych, WAT, Warszawa, 1992.
- [6] Zygmunt B., Motyl K.: *Komputerowe wspomaganie procesu modelowania lotu pocisku rakietowego w pakiecie MathCad*, Mechanik, nr 7/2011, CD-ROM, s. 973-980.
- [7] Baranowski L.: *Equations of motion of a spin-stabilized projectile for flight stability testing*, J. Theor. Appl. Mech., 51(1), 2013, pp. 235-246.
- [8] Baranowski L.: Numerical testing of flight stability of spin-stabilized artillery projectiles, J. Theor. Appl. Mech., 51(2), 2013, pp. 375-385.
- [9] Baranowski L.: *Effect of the mathematical model and integration step on the accuracy of the results of computation of artillery projectile flight parameters*, Bull. Pol. Ac.: Tech. 61 (2), 2013, pp. 475-484.
- [10] PRODAS, Arrow Tech Associates, Inc. USA, 2008.
- [11] Polska Norma PN-83, Mechanika lotu samolotów i szybowców.
- [12] Mathcad, Mathsoft Engineering & Education, Inc. USA.