MECHANIK 10/2015
I Konferencja „Osiągnięcia Studenckich Kół Naukowych Uczelni Technicznych" STUKNUT'15
Politechnika Gdańska, Wydział Oceanotechniki i Okrętownictwa, POGORIA, 24.04 – 06.05.2015

DOI: 10.17814/mechanik.2015.10.511

Prof. dr. hab. inż. Wiesław Tarełko
Wydział Mechaniczny
Akademia Morska w Gdyni

METODY FORMUŁOWANIA MODELI SYSTEMÓW DYNAMICZNYCH W MECHANICE

STRESZCZENIE

Ogólnie rzecz ujmując, wyróżnia się dwa podstawowe rodzaje badań naukowych w celu uzyskania modelu matematycznego, tj. metoda opisowa oraz metody analityczne. Z ich wykorzystaniem uzyskuje się dwa różne rodzaje modeli matematycznych: modele opisowe oraz modele przyczynowe. W mechanice wykorzystywane są głównie modele przyczynowe, które 'wnikają' w przyczyny obserwowanego zjawiska, tzn. pozwalają poznać jego mechanizm fizyczny. Wyróżnia się przy tym dwie metody budowy tych modeli, a mianowicie bilansową (równania bilansowe) oraz wariacyjną (równania wariacyjne). Zagadnienia związane z budową poszczególnych rodzajów modeli przedstawiono w dwóch powiązanych ze sobą artykułach. Niniejszy artykuł dotyczy zagadnień związanych z budową modelu opisowego oraz modelu przyczynowego do budowy którego wykorzystano metodę bilansową. W szczególności zaś, przedstawiono proces tworzenia tych modeli na przykładzie wahadła matematycznego. W drugim kolejnym artykule zaprezentowano model przyczynowy zbudowany z wykorzystaniem metody wariacyjnej.

Słowa kluczowe: *modelowanie, metoda , mechanika, systemy dynamiczne*

METHODS OF BUILDING DYNAMICAL SYSTEM MODELS IN MECHANICS

SUMMARY

Generally, we can distinguish two main types of research enables to receive a mathematical model: qualitative and quantitative. Using these methods we can obtain two different types of mathematical models: descriptive and explanatory models respectively. In mechanics, we mainly use the explanatory models, which indicate a cause-effect relationship in the studied phenomenon. We could distinguish two fundamental methods of developing the explanatory models, namely: balance (balance equations) and variational (variational equations) methods. This paper deal with both the descriptive model and the explanatory model obtained by means of the balance method. Particularly, based on the exemplar of the mathematical pendulum the creation process of these models is presented.

Keywords: *modeling, balance method, mechanics, dynamical systems*

1. WPROWADZENIE

Od zarania dziejów Człowiek obserwował otaczającą go przyrodę. Zaczął zauważać, że występowanie niektórych jej zjawisk charakteryzuje się określoną prawidłowością. Uczył się wykorzystywać te zaobserwowane prawidłowości w życiu codziennym. Potrafił też prognozować stany przyszłe interesujących go zjawisk. Pozyskana w ten sposób wiedza była przekazywana z pokolenia na pokolenie. Pierwszymi ludźmi, od których można datować rozwój nowoczesnej nauki byli Galileusz (1564–1642) i Newton (1642–1727). Galileusz pierwszy zastosował w swoich badaniach systematyczne eksperymentowanie, powtarzane pomiary i matematyczny zapis uzyskanych wyników. Newton w 1687 roku opublikował dzieło *Philosophiae naturalis principia mathematica*, w którym przedstawił podstawy nowoczesnej fizyki, a którego metodologiczne przesłanie, aktualne do dzisiaj, głosi, że: 'istnieją prawa przyrody i możemy je znaleźć'.

Poszukując praw przyrody napotyka się zasadniczą trudność polegającą na tym, że nie można 'za jednym zamachem' zbadać całej przyrody. Należy wówczas ją poznawać badając jej wydzielone 'wycinki', czyli systemy empiryczne. Jednakże nawet wtedy zdarza się, że interesujący nas system może okazać się zbyt złożony i całościowe, bezpośrednie jego zbadanie nie jest możliwe. W takim przypadku można go badać za pośrednictwem jego modelu, a w szczególności modelu teoretycznego.

Ogólnie można stwierdzić, że znajomość modelu pozwala na:
- opis zjawiska w sposób zrozumiały dla człowieka,
- określenie pewnych cech zjawiska,
- przewidywanie wartości nieznanych (np. przyszłych) związanych z danym zjawiskiem.

W mechanice rozumienie i przewidywanie wzbogaca wiedzę o przebiegu zjawisk w układach mechanicznych i ich działaniu, umożliwia wybór optymalnych rozwiązań dla projektowanych układów mechanicznych, a także umożliwia sterowanie istniejącymi układami mechanicznymi.

Modele teoretyczne w mechanice przedstawiają modelowaną rzeczywistość w uproszczeniu, przy czym stopień uproszczenia może zależeć od różnych względów, np. od celu budowy modelu oraz od stanu naszej wiedzy o modelowanym systemie. Regułą jest też usuwanie z modelu tych cech lub właściwości, których wpływ na badaną rzeczywistość jest nieistotny. Upraszczanie nie musi oznaczać, że moc heurystyczna modelu uproszczonego będzie mniejsza niż tego samego modelu przed uproszczeniem.

Modele teoretyczne można klasyfikować na wiele różnorodnych sposobów, np. w zależności od substancjalności (fizyczne i abstrakcyjne), od stanu przebiegającego procesu (statyczne, dynamiczne), od charakteru cech (deterministyczne, probabilistyczne, posybilistyczne) itp. Jednym z rodzajów modeli abstrakcyjnych jest model o strukturze algebraicznej określany jako model matematyczny. W takim ujęciu rozpatrywanego zagadnienia, modelowaniem matematycznym nazywa

się etap procesu modelowania polegający na stworzeniu sformalizowanego pod względem matematycznym opisu zjawiska. Efektem tego działania jest model matematyczny, który dla zagadnień związanych z mechaniką jest zazwyczaj równaniem lub układem równań.
Wyróżnia się dwie zasadnicze metody tworzenia modeli matematycznych w mechanice, a mianowicie:

- metoda opisowa, za pomocą której uzyskuje się model opisowy,
- metody analityczne, za pomocą których uzyskuje się model przyczynowy.

Istotą pierwszej metody jest uzyskanie wyników liczbowych z pomiarów, a następnie uzyskanie odpowiedniej zależności funkcyjnej. Sam mechanizm fizyczny obserwowanego zjawiska nie jest istotny i z tego względu nie docieka się jego przyczyn.
Metody analityczne za pomocą których uzyskuje się model przyczynowy 'wnika' w przyczyny obserwowanego zjawiska, tzn. pozwala poznać jego mechanizm fizyczny.
Celem niniejszego artykułu jest zaprezentowanie obu metod formułowania modeli systemów dynamicznych w mechanice. Proces tworzenia modelu opisowego z wykorzystaniem metody opisowej oraz modelu przyczynowego z wykorzystaniem metody bilansowej przedstawiono na przykładzie wahadła matematycznego.

2. METODA OPISOWA

Punktem wyjścia wszystkich rozważań w fizyce, w tym mechanice jest doświadczenie. Przeprowadzając pomiary i obserwacje otrzymuje się wyniki liczbowe. Z reguły dokonuje się fundamentalnego podziału pomiarów na te, które będą prognozowane (czyli tak zwane zmienne zależne), oraz te, które posłużą za przesłanki (czyli zmienne niezależne). Następnie, aby opisać wyniki pomiarów tworzy się modele, które w danym przypadku będą modelami opisowymi, zwanymi również zjawiskowymi lub fenomenologicznymi. Procedura tworzenia modelu opisowego w uproszczeniu przedstawia się następująco:

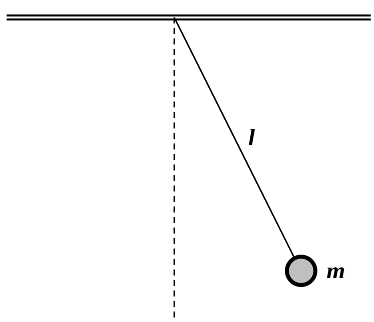
- przeprowadza się pomiary,
- poddaje się analizie wyniki uzyskane z tych pomiarów,
- poszukuje się parametrów istotnych dla rozważanego zagadnienia,
- poszukuje się zależności funkcyjnej lub często po prostu ją się zgaduje na podstawie wiedzy, intuicji i doświadczenia,
- dopasowuje się parametry funkcji,
- porównuje się z wynikami przeprowadzonych pomiarów.

Jeżeli zgodność nie jest zadawalająca, cofa się o jeden lub kilka kroków, nawet do etapu przeprowadzenia dodatkowych pomiarów z większa dokładnością i liczbą mierzonych parametrów.
Innym określeniem modelu uzyskanego w wyniku zaprezentowanej metody jest 'czarna skrzynka'. Przedstawia ona układ, o którym nie posiada się absolutnie żadnej informacji o zjawiskach zachodzących w jego wnętrzu.
Sposób tworzenia modelu opisowego dla wahadła matematycznego zostanie przedstawiony z wykorzystaniem prawidłowości nazywanej izochronizmem. Mówi ona o tym, że czas trwania jednego pełnego drgania, na przykład ciężarka na drgającej sprężynie, jest taki sam dla różnych wychyleń (przynajmniej dla niedużych wychyleń). Własność niezależności drgań wahadła od początkowego wychylenia jest wykorzystywana do pomiaru czasu.
Legenda głosi, że Galileusz obserwował rozkołysany świecznik w katedrze w Pizie. Kolejne wahania świecznika były coraz mniejsze. Mierząc czas kolejnych wahań za pomocą własnego pulsu, stwierdził, że mimo malejącej amplitudy czas kolejnych wahnięć był taki sam. Obserwacja ta umożliwiła w połowie XVII wieku stworzenie dokładnych zegarów wahadłowych, które przez ponad dwieście lat były najdokładniejszymi urządzeniami do pomiaru czasu. Wyniki obserwacji wahadła przez Galileusza, zaprezentowane w dwóch jego dziełach [1] i [2], można posumować następująco:

- wahadło prawie powraca do stanu początkowego wychylenia,
- okres drgań wahadła nie zależy od zawieszonej masy,
- okres drgań wahadła nie zależy od amplitudy,
- okres drgań wahadła zależy od pierwiastka kwadratowego długości wahadła.

W celu zaprezentowania istoty budowy modelu opisowego przeprowadzono pomiary okresu drgań $\boldsymbol{T}$ dla wahadła matematycznego. Wykorzystano w cienką linkę, której długość $\boldsymbol{l}$ ulegała zmianie. Na jej końcu został zawieszony ciężarek o masie $\boldsymbol{m}$. Okres drgań $\boldsymbol{T}$ mierzono za pomocą stopera**.**
Z obserwacji poczynionych przez Galileusza wynika, że okres $\boldsymbol{T}$ drgań wahadła matematycznego (rys. 1):

- zależy tylko od długości wahadła $\boldsymbol{l}$,
- nie zależy od podwieszonej masy $\boldsymbol{m}$.



Rys. 1. Schemat wahadła matematycznego

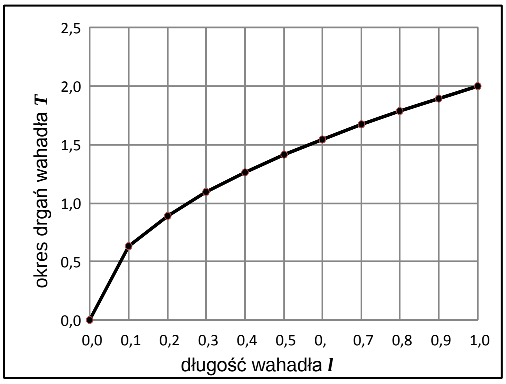
Wyniki uzyskane z przeprowadzonych pomiarów zaprezentowano w tabeli 1, zaś uzyskany wykres zależności okresu ***T*** drgań wahadła matematycznego od jego długości ***l*** przedstawiono na rysunku 2.

Tabela 1. Wyniki pomiarów

długość wahadła ***l*** [m]	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
okres drgań wahadła ***T*** [m]	0,6	0,9	1,1	1,3	1,4	1,5	1,7	1,8	1,9	2,0

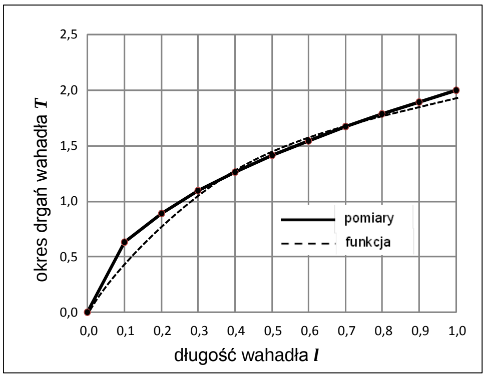
Następnym etapem jest poszukiwanie zależności funkcyjnej opisującej sporządzony wykres. Elementarna wiedza dotycząca przebiegu różnych funkcji matematycznych podpowiada, że uzyskaną zależność dobrze opisuje funkcja $y = \sqrt{x}$, zaś wyniki pomiarów funkcja:

$$T = c\sqrt{l} \tag{1}$$



Rys. 2. Wykres zależności okresu drgań wahadła matematycznego od jego długości

Najlepsze dopasowanie do krzywej uzyskanej z wyników pomiarów (Rys. 3) uzyskuje się, gdy parametr ***c*** wynosi około 1,99.



Rys. 3. Porównanie wykresów zależności funkcyjnych i uzyskanych z pomiarów

Jednakże w danym przypadku pojawia się istotna różnica w jednostkach po obu stronach równania:

$$T\ [s] = 1{,}99\sqrt{l}\ [\sqrt{m}] \tag{2}$$

W celu rozwiązania tego problemu można wykorzystać tzw. analizę wymiarową. Jest to narzędzie stosowane w do wyznaczania warunków podobieństwa dynamicznego poprzez analizę wielkości fizycznych charakteryzujących dane zjawisko.

Każdą zależność funkcyjną (nieznaną) można zapisać jako funkcję kilku parametrów fizycznych (niezależnych), np. dla wahadła matematycznego będzie to okres drgań ***T*** oraz

długość wahadła ***l***, z których każdy posiada swój wymiar. W rozpatrywanym przypadku w układzie SI będzie to odpowiednio sekunda i metr, zaś okres drgań wahadła można wyrazić jako funkcję jego długości $\boldsymbol{T = f(l)}$.

Założone parametry mają następujące wymiary [***T***] = [s] oraz [***l***] = [m]

Jednostkę okresu drgań wahadła ***T*** jako jednostkę czasu można tylko uzyskać wstawiając do równania (1) przyspieszenie grawitacyjne ***g***, uzyskując następującą postać równania:

$$T = c\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{25}{4}\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{3}$$

Oczywistym, że wykorzystując analizę wymiarową należy sprawdzić jednostki po obu stronach równania:

$$[\mathrm{s}] = \sqrt{\frac{[\mathrm{m}]}{\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]}} = \sqrt{\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}}\right]\cdot[\mathrm{s}^2]} = [\mathrm{s}]$$

W obserwowanym zjawisku drgań wahadła matematycznego wyznaczano jedynie ich okres ***T*** w zależności od długości wahadła ***l***. Nie wnikano natomiast w przyczyny obserwowanego zjawiska, tzn. nie poznano jego mechanizmu fizycznego. Z tego względu uzyskany model opisowy nie pozwala określić inne, istotne dla mechaniki, parametry rozpatrywanego zjawiska takie jak, np. prędkości i przyspieszenia w różnych położeniach wahadła. Inaczej rzecz ujmując, na podstawie uzyskanego modelu opisowego można wyznaczyć tylko okres drgań ***T*** wahadła matematycznego. Oczywistym jest, że istnieje możliwość zwiększenia adekwatności uzyskanego modelu opisowego poprzez zwiększenie dokładności pomiarów okresu ***T*** oraz długości ***l***. Jednakże, w takim przypadku zwiększa się tylko dokładność parametru ***c*** w równaniu (3). Stąd wynika oczywisty wniosek, że bez zrozumienia mechanizmu drgań wahadła można zwiększać tylko dokładność parametru ***c***. Ponieważ nie ma dokładnego opisu matematycznego zachowania się układu w dowolnej chwili, czyli równania jego ruchu, to zachowanie całego układu podczas całego cyklu drgań nie jest znane.

3. METODY ANALITYCZNE

W przypadku zastosowania metody analitycznej budowany jest model przyczynowy, w którym ujmuje się istotę obserwowanego zjawiska. Wnikając w jego przyczyny poznaje się mechanizm fizyczny danego procesu. Posługuje się przy tym idealizacją (np. punkt materialny, powierzchnia elementarna, układ izolowany) i/lub uogólnia się wnioski wynikające z doświadczenia. W modelach przyczynowych:

- wyjaśniane jest zachowanie układu,
- dąży się do odzwierciedlenia struktury układu,
- niezbędna jest wiedza o elementach układu i ich oddziaływaniach,
- model matematyczny odzwierciedla istotną strukturę układu (elementy i oddziaływania).

Istnieją dwie podstawowe metody analityczne tworzenia przyczynowych modeli systemów dynamicznych :

- metoda bilansowa,
- metoda wariacyjna.

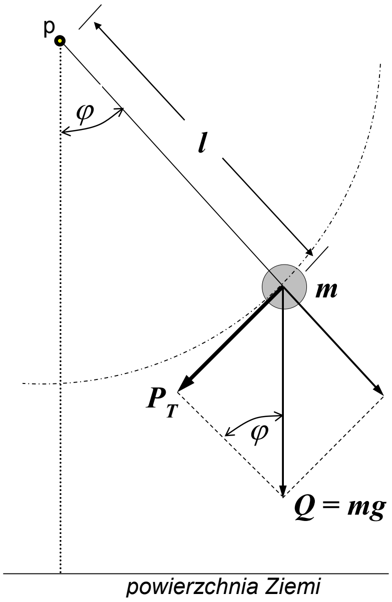
Metoda bilansowa jest to sposób formułowania modeli przyczynowych systemów dynamicznych polegający na bilansowaniu wielkości, które podporządkowane są zasadom zachowania z wykorzystaniem rachunku różniczkowego i całkowego.
Metoda wariacyjna polega na formułowaniu modeli przyczynowych systemów dynamicznych z wykorzystaniem rachunku wariacyjnego, którego celem jest znajdowanie funkcji, która minimalizuje funkcjonał (całkę w zagadnieniu wariacyjnym).
Najczęściej stosowaną, a jednocześnie najbardziej ogólną metodą formułowania modeli przyczynowych systemów dynamicznych jest metoda bilansowa. W systemach, w których występują wielkości materialne, bilansowaniu najczęściej podlegają te wielkości, które podporządkowane są zasadom zachowania masy, energii, pędu lub momentu pędu.
Modele przyczynowe stosowane są do opisu układów ze sprzężeniami zwrotnymi i złożonymi oddziaływaniami, nieliniowościami, przy zmianach warunków i parametrów. Innym określeniem modelu uzyskanego w wyniku metody bilansowej jest ‘szklana skrzynka’, model układu lub model strukturalny.
W najbardziej ogólnym przypadku, procedura tworzenia modelu przyczynowego z wykorzystaniem metody bilansowej zawiera następujące etapy:

- wybór wielkości bilansowych,
- ułożenie równań bilansowych,
- określenie wielkości wyjściowych.

4. MODEL PRZYCZYNOWY RUCHU WAHADŁA MATEMATYCZNEGO

W celu zaprezentowania istoty budowy modelu przyczynowego z wykorzystaniem metody bilansowej rozpatruje się wyidealizowane ciało o masie punktowej ***m*** zawieszone na nieważkim pręcie o długości ***l*** w punkcie *p*, które wytrącone z równowagi zaczyna się wahać w płaszczyźnie poziomej pod wpływem siły ciężkości (rys. 4). Przyjmuje się, że:

- ruch wahadła odbywa się pod wpływem siły grawitacyjnej,
- przybliżenie małych wychyleń wahadła.



Rys. 4. Schemat wahadła matematycznego modelu przyczynowego

Bilansowaniu można poddać różne wielkości pod warunkiem, że są one podporządkowane zasadom zachowania masy, energii, pędu lub momentu pędu. Dla rozpatrywanego zjawiska drgań wahadła matematycznego może to być np. bilans:
- jego energii kinetycznej $\boldsymbol{E_k}$ i potencjalnej $\boldsymbol{E_P}$,
- wykonanych prac związanych z przemieszczeniem masy ***m*** wahadła.

W pierwszym przypadku, zasady zachowania energii mechanicznej stanowią, że w dowolnym ruchu przebiegającym bez tarcia (i innych strat energii) energia mechaniczna układu izolowanego jest stała. Opis budowy modelu przyczynowego bilansującego ww. energie można znaleźć m.in. w [3].
Budowa modelu przyczynowego z wykorzystaniem metody bilansowej zostanie przedstawiona na przykładzie bilansu wykonanych prac związanych z przemieszczeniem masy ***m*** wahadła
Jak widomo, wprawienie wahadła w ruch obrotowy związane jest z wykonaniem pracy. A zatem bilansowaniu można poddać prace ***L*** związane z przemieszczeniem masy ***m*** wahadła (rys. 4):
- z położenia równowagi do jego krańcowego wychylenia pod działaniem momentu $\boldsymbol{M_B}$ wynikającego z działania siły bezwładności stycznej do zakreślanego okręgu,
- z krańcowego wychylenia do położenia równowagi pod działaniem momentu przywracającego równowagę $\boldsymbol{M_P}$ wynikającego z działania składowej siły grawitacyjnej ***mg*** stycznej do zakreślanego okręgu.

Zgodnie z mechaniką ciała sztywnego wykonującego ruch obrotowy, praca ***L*** wykonywana podczas obrotu ciała o kąt ***φ*** pod wpływem momentu sił ***M*** wyraża się wzorem:

$$L = \int \mathrm{d}L = \int \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{\varphi} \tag{4}$$

Elementarną pracę **d*L*** przemieszczenia masy ***m*** wahadła przy obrocie o elementarny kąt **d*φ*** obrotu wokół osi przechodzącej przez początek układu wyraża zależność:

$$\frac{dL}{d\varphi} = M \tag{5}$$

Obie wykonane prace muszą być sobie równe, co wyraża zależność:

$$\frac{dL_B}{d\varphi} - \frac{dL_P}{d\varphi} = 0 \tag{6}$$

gdzie:

$\boldsymbol{L_B}$ – elementarna praca związana z przemieszczeniem masy ***m*** wahadła położenia równowagi do jego krańcowego wychylenia pod działaniem momentu $\boldsymbol{M_B}$,

$\boldsymbol{L_P}$ – elementarna praca związana z przemieszczeniem masy ***m*** wahadła z krańcowego wychylenia do położenia równowagi pod działaniem momentu przywracającego równowagę $\boldsymbol{M_P}$.

W pierwszym przypadku elementarna praca wahadła **d*L*** przy obrocie o elementarny kąt **d*φ*** wynosi:

$$\frac{dL_B}{d\varphi} = M_B = ma \cdot l \tag{7}$$

gdzie:

a – przyspieszenie styczne masy ***m***,

l – długość wahadła.
Zależność miedzy przyspieszeniem ***a*** i prędkością transwersalną ***v*** masy ***m*** wahadła określa równanie:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = l\frac{d\omega}{dt} \tag{8}$$

gdzie ***ω*** prędkość kątowa ruchu masy ***m*** wahadła po okręgu, którą można wyznaczyć z zależności:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \tag{9}$$

Podstawiając zależności (8) i (9) do równania (7), uzyskuje się:

$$\frac{dL_B}{d\varphi} = m \cdot l^2 \cdot \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} \tag{10}$$

W drugim przypadku elementarna praca wahadła **d*L*** przy obrocie o elementarny kąt **d*φ*** wynosi:

$$\frac{dL_P}{d\varphi} = -M_P = -P_T \cdot l \tag{11}$$

Z rysunku wynika, że:

$$\sin\varphi = \frac{P_T}{mg} \tag{12}$$

gdzie ***g*** jest przyspieszeniem grawitacyjnym.
Wówczas:

$$P_T = mg \cdot \sin\varphi \tag{13}$$

Podstawiając zależność (13) do równania (11), uzyskuje się:

$$\frac{dL_P}{d\varphi} = -mg \cdot l \cdot \sin\varphi \tag{14}$$

Z kolei podstawiając obie uzyskane zależności (10) i (14) do równania bilansowego (6), otrzymuje się:

$$m \cdot l^2 \cdot \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + mg \cdot l \cdot \sin\varphi = 0 \tag{15}$$

Następnie dzieląc obie strony równania (15) przez $m \cdot l^2$ uzyskuje się zależność:

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l} \cdot \sin\varphi = 0 \tag{16}$$

Otrzymane równanie jest nieliniowym równaniem różniczkowym, którego ścisłe rozwiązanie jest dość złożone.
W przypadku, gdy zgodnie z przyjętym założeniem przybliżenie odchylenia wahadła są małe $\varphi \rightarrow 0$, wówczas:

$$\sin\varphi \underset{\varphi\to 0}{\longrightarrow} \varphi \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0 \tag{17}$$

uzyskuje się liniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu:

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 \cdot \varphi = 0 \tag{18}$$

Jest to znane równanie oscylatora harmonicznego bez tłumienia, w którym ***ω*** jest częstością kołową (wzór na prędkość kątową jest identyczny ze wzorem na częstość kołową ruchu drgającego - istnieje ścisła odpowiedniość między ruchem po okręgu, a ruchem drgającym harmonicznym):

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{19}$$

Uzyskany dokładny opis matematyczny zachowania się układu w dowolnej chwili, czyli równania jego ruchu, pozwalają na wyznaczenie dowolnych wielkości opisujących dynamikę całego układu podczas całego cyklu drgań wahadła matematycznego.
Przykładowo, zależność na okres drgań ***T*** wahadła matematycznego rozpatrywaną już w metodzie opisowej można uzyskać wykorzystując wzór wyrażający ten okres za pomocą prędkości kątowej ***ω*** w ruchu po okręgu:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{20}$$

Podstawiając do tego wzoru zależność (19), uzyskuje się:

$$T = c\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{21}$$

Uzyskana zależność (21) ma zbliżoną postać do równania (3) otrzymanego metodą opisową i różniącą się jedynie wartością parametru $\boldsymbol{c}$ wynoszącego odpowiednio $25/4$ oraz 2π.
Jednakże dla dużych kątów odchyleń wahadła $\boldsymbol{\varphi}$ nie można stosować użytego przybliżenia $\sin\boldsymbol{\varphi} \approx \boldsymbol{\varphi}$. Wówczas okres drgań $\boldsymbol{T}$ wahadła matematycznego należy wyznaczyć rozwiązując równanie (16) w sposób ścisły.

5. PODSUMOWANIE

Metoda opisowa budowy modeli systemów dynamicznych może i jest bardzo pomocna w rozwiazywaniu wielu zagadnień praktycznych z zakresu mechaniki, np. w przypadku, gdy utworzony model przyczynowy jest zbyt skomplikowany, a zastosowane uproszczenia przyczyniają do braku uwzględniania wielu elementów istotnych dla obserwowanego zjawiska. W klasycznym podejściu do modelowania podobnych zagadnień najczęściej stosowane są zależności regresyjne, a także sztuczne sieci neuronowe.
Metoda analityczna umożliwia zbudowanie modelu przyczynowego zjawiska w postaci równania lub równań różniczkowych. Oczywistym jest to, że dla jednego zjawiska można budować różne modele przyczynowe w postaci równań, uwzględniające mniej lub więcej cech zespołu praw nim rządzących. Otrzymane w ten sposób równania mogą sugerować istnienie związków między miarami wielkości i takich zjawisk, które uprzednio nie były stwierdzone doświadczalnie. Przykładowo, w smarowaniu hydrodynamicznym poprzecznych łożysk ślizgowych, Reynolds wyprowadził równanie dla przepływu dwukierunkowego wynikające z praw zachowania masy, pędu i energii. Równanie to wskazało na dwa dodatkowe, oprócz znanego zjawiska klina smarnego, możliwe sposoby realizacji smarowania hydrodynamicznego, tj. efekt wyciskania smaru oraz efekt kurczącej się powierzchni w kierunku ruchu.
Natomiast innym zagadnieniem jest sposób rozwiązania uzyskanego równania (równań różniczkowych). Istnieją dwa podstawowe metody rozwiazywania tego rodzaju równań:
- analityczne,
- numeryczne.

Uzyskanie analitycznego rozwiązania równań różniczkowych może być dosyć złożone, a niekiedy nawet niemożliwe. W bardzo dużym odsetku przypadków nie można stosować metod analitycznych ponieważ równania opisujące proces są często tak skomplikowane, że przy danych warunkach jednoznaczności nie są rozwiązywalne. Często zdarza się, że analityczne rozwiązanie równania jest możliwe tylko przy zastosowaniu takich przybliżeń, w następstwie których rozwiązanie traci praktyczną użyteczność.
Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych oparte są na interpretacji geometrycznej równania różniczkowego. Metody numeryczne pozwalają na formułowanie matematycznych problemów i rozwiązywanie ich w efektywny sposób. Ich cechą charakterystyczną jest zastąpienie zwykle pracochłonnych obliczeń innymi metodami, wymagającymi zastosowania arytmetycznych działań. Przed rozwojem przemysłu komputerowego najwięcej czasu poświęcano na rozwiązywanie problemów (rozwiązywanie równań algebraicznych, różniczkowych), a znacznie mniej czasu poświęcano na samo formułowanie problemu i interpretację wyników. Było to efektem trudności w otrzymywaniu rozwiązań. Obecnie komputery i metody numeryczne stanowią alternatywę dla metod tradycyjnych.
Wykorzystując komputery nie jesteśmy zmuszeni do robienia wielu założeń upraszczających co zwiększa możliwość rozwiązywania złożonych problemów.

LITERATURA

1. Galileo Galilei. Dialogue Concerning the Two Chief World Systems. http://selfdefinition.org/science/25-greatest-science-books-of-all-time/...pdf,
2. Galileo Galilei. Dialogues Concerning Two New Sciences. https://www.stmarys-ca.edu/sites/default/files/attachments/files/Dialogues_Concerning_Two_New_Sciences.pdf,
3. Kittel Ch., Knight W.D., Ruderman M. A.. Mechanika. Wyd. 3. Imprint. Warszawa. Państwowe Wydawnictwa Naukowe, 1975.