

# Szacowanie niepewności pomiaru – metoda Monte Carlo

## Evaluation of measurement uncertainty – Monte Carlo method

WOJCIECH PŁOWUCHA  
WŁADYSŁAW JAKUBIEC  
PAWEŁ ROSNER\*

DOI: <https://doi.org/10.17814/mechanik.2017.12.195>  
English version available on: [www.mechanik.media.pl](http://www.mechanik.media.pl)

Przedstawiono zalety metody Monte Carlo w porównaniu z metodami szacowania niepewności pomiaru typu A i B. Omówiono problem wyznaczania niepewności w przypadku dwóch lub więcej dominujących składników. Zaprezentowano wyniki eksperymentu mającego na celu ocenę wpływu strategii próbkowania na niepewność pomiaru odchyłki okrągłości. Przeanalizowano kwestię „błędów systematycznych” przy szacowaniu niepewności pomiarów współrzędnościowych.

**SŁOWA KLUCZOWE:** niepewność pomiaru, metoda Monte Carlo, pomiary współrzędnościowe

*Advantages of Monte Carlo method are presented and compared with A and B type method of measurement uncertainty evaluation. Problem of uncertainty determination, in case of two or more dominant components, is discussed. Results of experiment to evaluate impact of probing strategy on measurement uncertainty of roundness deviation are presented. Issue of 'systematic error' in evaluation of coordinate measurement uncertainty is analyzed.*

**KEYWORDS:** measurement uncertainty, Monte Carlo method, coordinate measurement

Przy szacowaniu niepewności pomiaru, obok metod typu A i B [1–3], coraz szersze zastosowanie znajduje technika symulacyjna nazywana metodą Monte Carlo (MC) [4]. Z analizy literatury wynika, że jest ona najczęściej stosowana samodzielnie. W obszarze związanym ze specyfikacją geometrii wyrobów znane jest np. oprogramowanie do szacowania niepewności pomiarów współrzędnościowych [5].

Celem niniejszej publikacji jest zwrócenie uwagi na fakt, że metoda MC może również służyć do szacowania pojedynczych składników niepewności pomiaru, a przede wszystkim do analizowania niepewności pomiaru.

Metoda MC jest ze swej natury uniwersalna. Pozwala na wyznaczenie rozkładu dowolnej funkcji (nie tylko sumy) dowolnej liczby zmiennych losowych o dowolnych rozkładach prawdopodobieństwa. Bezpośrednim wynikiem symulacji MC jest znaczna liczba (w [4] jest mowa nawet o milionie) realizacji wynikowej zmiennej losowej, na podstawie których można (w zależności od potrzeby) wyznaczyć rozkład empiryczny (histogram) albo obliczyć dowolne charakterystyki zmiennej losowej, jak: średnia, odchylenie standardowe, momenty wyższych rzędów czy kwantyle.

Istotną zaletą metody MC jest intuicyjność, co zostanie pokazane na trzech przykładach: szacowania niepewności pomiaru przy wzorcowaniu suwmiarki, oceny wpływu strategii próbkowania na niepewność pomiaru odchyłki okrągłości oraz dyskusji kwestii „błędów systematycznych” w procedurze szacowania niepewności pomiarów współrzędnościowych z użyciem przedmiotów wzorcowych.

Jeżeli celem symulacji jest wyznaczenie rozszerzonej niepewności pomiaru  $U$  – a tak jest w większości przypadków – to nie jest konieczne wyznaczenie rozkładu prawdopodobieństwa w ścisłym rozumieniu tego pojęcia

– ani postać, ani parametry rozkładu nie są ważne. Wartość niepewności  $U$  może zostać obliczona bezpośrednio z rozkładu empirycznego błędu (zmienna losowa  $X$ ) po odrzuceniu 5% wartości skrajnych (zarówno dodatnich, jak i ujemnych), co odpowiada bezpośrednio zastosowaniu wzoru:

$$P(|X| < U) = 0,95 \quad (1)$$

### Generatory liczb losowych

Powszechnie dostępnym oprogramowaniem – używanym zarówno w przemyśle, jak i na wyższych uczelniach – jest MS Excel. Zawiera on generator liczb losowych o rozkładzie jednostajnym na odcinku  $(0, 1)$ , który ma postać funkcji „=los()”, a ponadto w dodatku „Analiza danych” dostępne jest narzędzie „Generowanie liczb pseudolosowych”, które pozwala na generowanie liczb losowych dla dwóch rozkładów prawdopodobieństwa zmiennej losowej ciągłej: jednostajnego (równomiernego, prostokątnego) i normalnego. Gdyby przyjąć, że w metodzie MC jako modele błędów będą stosowane takie same rozkłady, jak w metodzie typu B, to brakuje co najmniej dwóch generatorów liczb losowych: o rozkładzie trójkątnym i rozkładzie  $U$ . W obu przypadkach można posłużyć się metodą odwracania dystrybucyjności albo skorzystać z innych, prostszych rozwiązań:

- liczby losowe o rozkładzie trójkątnym  $T(-a, a)$  można otrzymać, gdy doda się dwie niezależnie generowane liczby losowe o takich samych rozkładach jednostajnych  $R(-a/2, a/2)$ ,
- liczby losowe o rozkładzie  $U(-a, a)$ , rozumianym jako rozkład arcusa sinusa, można generować, wykorzystując fakt, że zmienna losowa  $X$  zdefiniowana jako

$$X = a \cdot \sin(Y) \quad (2)$$

ma rozkład  $U(-a, a)$ , jeżeli zmienna losowa  $Y$  ma rozkład jednostajny  $R(0, 2\pi)$ .

Do przeprowadzania symulacji lepiej nadaje się oprogramowanie Minitab [6], które ma znacznie więcej generatorów, chociaż tylko trzy typowe dla omawianego zastosowania (jednostajny, normalny i trójkątny). Istotne zalety tego oprogramowania to maksymalnie 10 000 000 przebiegów (tyle wierszy ma arkusz) i przyjazne narzędzia graficzne (np. łatwe rysowanie histogramu z możliwością nałożenia wykresu funkcji gęstości).

Symulacja metodą MC jest również możliwa w oprogramowaniu do szacowania niepewności pomiaru – GUM Workbench [7]. Są w nim generatory rozkładu jednostajnego, trójkątnego, normalnego,  $U$  i trapezowego. Oprogramowanie to umożliwia dodatkowo symulację dla przypadku składników skorelowanych.

### Analiza przykładu wzorcowania suwmiarki

Podstawowym dokumentem wykorzystywanym w laboratoriach wzorcowujących do szacowania niepewności pomiaru przy wzorcowaniu jest EA-4/02 [8]. Zgodnie z nim

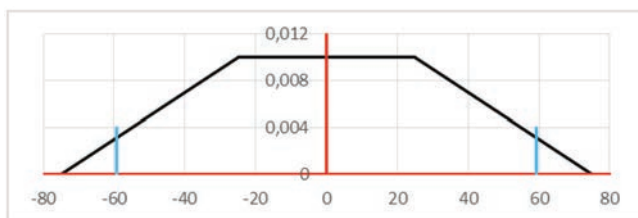
\* Dr inż. Wojciech Płowucha (wplowucha@ath.bielsko.pl), dr hab. inż. Władysław Jakubiec prof. ATH (wjakubiec@ath.bielsko.pl), mgr inż. Paweł Rosner (prosnier@ath.bielsko.pl) – Wydział Budowy Maszyn i Informatyki Akademii Techniczno-Humanistycznej w Bielsku-Białej

na świadectwach wzorcowania należy podawać rozszerzoną niepewność pomiaru  $U$  (według [8] „uzyskaną z pomnożenia niepewności standardowej  $u$  przez współczynnik rozszerzenia”) oraz współczynnik rozszerzenia  $k$ . Podane w nawiasie wymaganie stoi w sprzeczności z praktyką, ponieważ często jako pierwsza wyznaczana jest niepewność rozszerzona.

Dobrym przykładem na pokazanie zalet techniki symulacyjnej jest szacowanie niepewności pomiaru przy wzorcowaniu suwmiarki. W dokumencie przyjęto założenie, że dwa dominujące składniki niepewności mają rozkłady jednostajne:  $R(-50, 50)$  i  $R(-25, 25)$  (w  $\mu\text{m}$ ). Można obliczyć teoretycznie (korzystając z rachunku prawdopodobieństwa), że ich suma ma następujący rozkład trapezowy (rys. 1):

$$f(x) = \begin{cases} 0,0002x + 0,015 & \text{dla } x \in [-75, -25] \\ 0,01 & \text{dla } x \in [-25, 25] \\ -0,0002x + 0,015 & \text{dla } x \in [25, 75] \end{cases} \quad (3)$$

co pozwala na obliczenie rozszerzonej niepewności pomiaru  $U$  jako kwantyla 0,975 tego rozkładu. Obliczona w ten sposób wartość  $U = 59,19 \mu\text{m}$ .



Rys. 1. Wykres funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu trapezowego jako sumy dwóch rozkładów jednostajnych  $R(-50, 50)$  i  $R(-25, 25)$ , z zaznaczonymi kwantylami 0,025 i 0,975

Wartość  $U$  można jednak wyznaczyć znacznie łatwiej (i bez znajomości rachunku prawdopodobieństwa) metodą MC. Wystarczy:

- wygenerować dwa ciągi liczb losowych o wspomnianych rozkładach jednostajnych i obliczyć sumy par liczb losowych,
- odrzucić 5% wartości skrajnych uzyskanych w ten sposób liczb losowych (wygodniej jest obliczyć wartości bezwzględne sum par liczb losowych i odrzucić 5% największych wartości albo obliczyć wartość kwantyla 0,95).

W arkuszu kalkulacyjnym MS Excel można w jednej kolumnie wygenerować maksymalnie ok. 32 000 liczb losowych. Jeśli przyjmie się taką liczbę powtórzeń, uzyskuje się oszacowania rozszerzonej niepewności pomiaru z przedziału  $(58,87 \div 59,40) \mu\text{m}$ . Ponieważ niepewność pomiaru podaje się z dokładnością do jednego lub dwóch miejsc znaczących, to uzyskana dokładność jest zupełnie wystarczająca.

Zgodnie z wymaganiami dokumentu EA-4/02 [8] na świadectwie wzorcowania musi się jeszcze znaleźć wartość współczynnika rozszerzenia  $k$ . W przykładzie podanym w EA-4/02 wykorzystano wzory, których pochodzenie jest znane lub możliwe do odtworzenia jedynie przez specjalistów z zakresu rachunku prawdopodobieństwa. Jeśli zaś użyje się techniki symulacyjnej, zadanie jest proste: niepewność standardowa to odchylenie standardowe wyników eksperymentu symulacyjnego, a współczynnik rozszerzenia to iloraz niepewności rozszerzonej  $U$  i niepewności standardowej  $u$ . W przykładzie z symulacji otrzymano  $u = 32 \mu\text{m}$  i współczynnik  $k = 1,85$ , podczas gdy dokładne (obliczone analitycznie) wartości wynoszą odpowiednio:  $33 \mu\text{m}$  i  $1,83$ .

Warto zwrócić uwagę, że przykład z rozkładem trapezowym jako sumą dwóch rozkładów jednostajnych jest jedynym zadaniem rozwiązywalnym narzędziami analitycznymi.

### Analiza przykładu – wpływu liczby punktów próbkowania na niepewność pomiaru odchyłki okrągłości

Istotę metody MC wyjaśnia również przykład dotyczący oceny rozkładu prawdopodobieństwa błędów pomiaru odchyłki okrągłości (otworu lub wałka) podany w [9]. Nawiązuje on do zalecenia, zgodnie z którym, jeśli konieczne jest zastosowanie niewielkiej liczby punktów próbkowania, powinno to być 7 pkt rozłożonych równomiernie na obwodzie okręgu. Przyjęto, że odchyłka okrągłości mierzonego przedmiotu ma postać trójgraniastości (jest to najmniej korzystny przypadek), a próbkowanie odbywa się w 6, 7 lub 8 równomiernie rozmieszczonych punktach.

Równanie okręgu z odchyłką w postaci trójgraniastości w układzie biegunowym  $(r, \varphi)$  ma postać

$$r = R + A \cdot \sin(3\varphi) \quad (4)$$

gdzie:  $R$  – nominalny promień okręgu,  $A$  – amplituda odchyłki okrągłości. Przyjęto, że  $R = 100 \text{ mm}$  i  $A = 0,05 \text{ mm}$  (symulację można wykonać tylko dla konkretnych danych).

W przytoczonym poniżej przykładzie – w odróżnieniu od [9] – zamiast wartości odchyłki oblicza się błąd pomiaru tej odchyłki. Eksperyment symulacyjny w arkuszu MS Excel polega na:

- generowaniu z rozkładu jednostajnego na odcinku  $(0, 2\pi/7)$  położenia kąтового pierwszego punktu próbkowania:

$$\varphi_1 = \text{los}() \cdot 2\pi/7 \quad (5)$$

- wyliczeniu położenia pozostałych 6 pkt próbkowania:

$$\varphi_i = \varphi_1 + 2(i-1) \cdot \frac{\pi}{7}; i = 2..7 \quad (6)$$

- wyliczeniu wartości promieni (drugiej współrzędnej):

$$r_i = R + A \cdot \sin(3\varphi_i); i = 1..7 \quad (7)$$

- przeliczeniu współrzędnych punktów do układu kartezjańskiego:

$$x_i = r_i \cdot \cos(\varphi_i); i = 1..7 \quad (8)$$

$$y_i = r_i \cdot \sin(\varphi_i); i = 1..7 \quad (9)$$

- obliczeniu współrzędnych środka i promienia okręgu (wykorzystano algorytm podany w [10], pozwalający na zapisanie wzorów w jednym wierszu arkusza MS Excel),
- obliczeniu odchyłki okrągłości  $\Delta$  jako maksymalnej różnicy odległości punktów próbkowania od obliczonego środka okręgu:

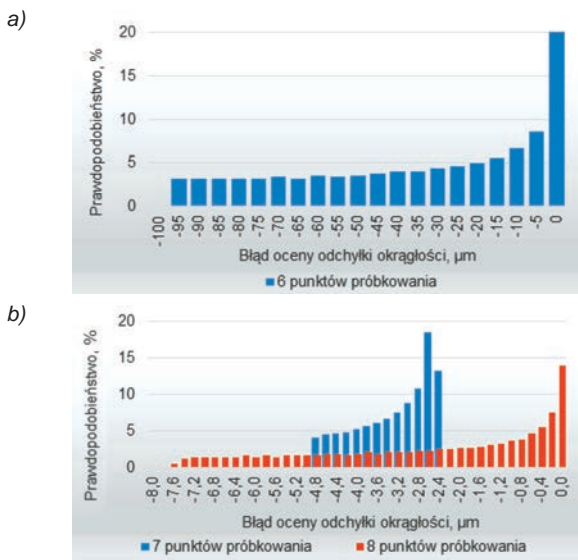
$$\Delta = r_{\max} - r_{\min} \quad (10)$$

- obliczeniu błędu pomiaru odchyłki okrągłości  $\delta$  (poprawny wynik to:  $2A = 0,1 \text{ mm}$ ):

$$\delta = \Delta - 2 \cdot A \quad (11)$$

- powtórzeniu tych obliczeń znaczną liczbą razy i zbudowaniu z otrzymanych wyników histogramu.

W przykładzie, zamiast generować położenie kątowe pierwszego punktu próbkowania, można przeprowadzić systematyczny podział odcinka  $(0, 2\pi/7)$  na  $n$  części i wykonać obliczenia  $n$  razy, zmieniając położenie z krokiem  $2\pi/7/n$ . Liczba powtórzeń nie musi być duża; już dla  $n = 50$  uzyskuje się bardzo dobre wyniki. Jeżeli jednak



Rys. 2. Histogram błędu oceny odchyłki okrągłości w zależności od liczby punktów próbkowania: a) 6 pkt, b) 7 i 8 pkt

wyniki symulacji mają być opracowane w postaci histogramu, warto przyjąć np.  $n = 1000$ .

Wyniki w postaci histogramów pokazano na rys. 2. W każdym przypadku błędy pomiaru są ujemne. Przy 6 pkt próbkowania (rys. 2a) możliwe jest popełnienie zarówno błędu równego 0, jak i  $-100 \mu\text{m}$  (wartość mierzonej odchyłki wynosi  $100 \mu\text{m}$ ). Po odrzuceniu 5% najgorszych wyników symulacji otrzymuje się wartość niepewności  $U = 92 \mu\text{m}$ . W przypadku 7 pkt próbkowania (rys. 2b) błędy pomiaru zawierają się w granicach od  $-2,5$  do  $-5 \mu\text{m}$ , co stanowi tylko 2,5% do 5% mierzonej wartości, chociaż nigdy nie są mniejsze niż  $-2,5 \mu\text{m}$ . 95% błędów nie przekracza wartości  $U = 4,6 \mu\text{m}$ . W przypadku 8 pkt próbkowania (rys. 2b) błędy pomiaru zawierają się w granicach od  $-7,6$   $\mu\text{m}$  do 0. 95% błędów nie przekracza wartości  $U = 6,9 \mu\text{m}$ .

Podobnie można analizować wpływ innych strategii próbkowania na wyniki pomiaru średnicy i/lub odchyłki okrągłości.

### Dyskusja problemu z „błędem systematycznym” w normie ISO 15530-3

Pomimo opublikowania dokumentów JCGM 100 i 101 [1, 4] ciągle nie ma pełnej zgodności w kwestii zastosowania różnych metod szacowania niepewności. W 2011 r. opublikowano normę ISO 15530-3 [11] podającą procedurę szacowania niepewności pomiaru współrzędnościowego z wykorzystaniem eksperymentu. Przed nią była specyfikacja techniczna ISO/TS 15530-3 [12] z 2004 r. Istotne różnice między tymi dokumentami wywołały dyskusję, w której uczestniczą również autorzy niniejszej publikacji [np. 13].

W obu wersjach eksperyment polega na wykonaniu 20-krotnego pomiaru wyworcowanego artefaktu. Pomiaru są rozłożone w dłuższym okresie (w załączonym do normy przykładzie jest to 7 dni). Są wykonywane w różnych porach dnia i przez różnych operatorów. W dokumencie z 2004 r. [12] przewidziano szacowanie rozszerzonej niepewności pomiaru na podstawie wzoru, który po pominięciu nieistotnych dla niniejszej publikacji szczegółów ma postać:

$$U = 2s + |\bar{x}| \quad (12)$$

gdzie:  $\bar{x}$  – wartość średnia,  $s$  – odchylenie standardowe zaobserwowanych różnic względem wyników wzorcowania.

W czasie prac nad nowszym dokumentem uznano, że to błąd systematyczny, który powinien być – zgodnie z zaleceniami przewodnika [1] – skorygowany.

Problem leży w tym, że wspomniana wartość średnia nie jest wynikiem żadnego znanego systematycznego oddziaływania i nie powinna być traktowana jako błąd systematyczny. Można to potwierdzić, wykonując eksperymenty symulacyjne polegający na wygenerowaniu 20 liczb z różnych rozkładów i wykazaniu, że wyniki otrzymane według wzoru z dokumentu [12] nie dają podstaw do kwestionowania jego poprawności.

W eksperymencie rozważono cztery rozkłady prawdopodobieństwa dla błędów pomiaru (normalny, jednostajny, trójkątny i U) oraz przyjęto, że we wszystkich przypadkach rozszerzona niepewność pomiaru  $U$  odpowiadająca prawdopodobieństwu 0,95 jest taka sama i wynosi  $10 \mu\text{m}$ . Wyniki tak zdefiniowanego eksperymentu zestawiono w tabelicy.

TABLICA. Wyniki eksperymentu mającego na celu wykazanie poprawności wzoru (12), w  $\mu\text{m}$

	Rozkład			
	trójkątny	normalny	jednostajny	U
$\bar{x}$	$-1,3 \pm 2,5$	$-1,4 \pm 1,2$	$-1,5 \pm 1,4$	$-1,7 \pm 4,1$
$s$	$3,9 \pm 5,1$	$4,1 \pm 6,2$	$4,1 \pm 6,9$	$6,0 \pm 7,9$
$U$	$8,2 \pm 11,0$	$8,3 \pm 14,0$	$8,3 \pm 15,0$	$12 \pm 17$
$\bar{U}$	9,7	11,0	12,0	15,0

Zgodnie z oczekiwaniami wartości średnie z próbek 20-elementowej, pochodzącej z rozkładów o wartości oczekiwanej równej 0, mogą przyjmować wartości wyraźnie różne od 0, zwłaszcza dla rozkładów wyraźnie różnych od rozkładu normalnego.

### Wnioski

Metoda MC – ze względu na uniwersalność, a także na łatwość projektowania i realizacji eksperymentu – jest godnym polecenia uzupełnieniem metod typu A i B.

Przykłady wskazują na wiele możliwych jej zastosowań. Ponadto metoda MC ma walory dydaktyczne.

Arkusze kalkulacyjny zawierający obliczenia można znaleźć na stronie Laboratorium Metrologii ATH ([www.lm.ath.bielsko.pl](http://www.lm.ath.bielsko.pl)) w zakładce „Do pobrania”.

### LITERATURA

- JCGM 100: 2008 Evaluation of measurement data. Guide to the expression of uncertainty in measurement.
- Jakubiec W., Płowucha W., Rosner P. „Szacowanie niepewności pomiaru w budowie maszyn. Budżet niepewności”. *Mechanik*. 12 (2016): s. 1802–1805.
- Jakubiec W., Płowucha W., Rosner P. „Szacowanie niepewności pomiaru w budowie maszyn. Dyskusja budżetu niepewności”. *Mechanik*. 12 (2016): s. 1806–1808.
- JCGM 101: 2008 Evaluation of measurement data. Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement”. Propagation of distributions using a Monte Carlo method.
- Trapet i in. „Traceability of coordinate measurements according to the method of the virtual measuring machine”. Braunschweig: PTB, 1999.
- „Poznaj Minitab 16”. Minitab Inc. 2010.
- GUM Workbench User Manual for Version 1.3, 2.3 and 2.4. Metrodata GmbH. Weil am Rhein 2011.
- EA-4/02 M: 2013 Wyznaczanie niepewności pomiaru przy wzorcowaniu.
- ISO/TS 15530-4:2008 Geometrical Product Specifications (GPS). Coordinate measuring machines (CMM): Technique for determining the uncertainty of measurement. Part 4: Evaluating task-specific measurement uncertainty using simulation.
- [https://www.dtcenter.org/met/users/docs/write\\_ups/circle\\_fit.pdf](https://www.dtcenter.org/met/users/docs/write_ups/circle_fit.pdf).
- PN-EN ISO 15530-3:2011 – Specyfikacje geometrii wyrobów (GPS). Współrzędnościowe maszyny pomiarowe (CMM): Metoda wyznaczania niepewności pomiaru. Część 3: Zastosowanie przedmiotów wzorcowych i wzorców.
- ISO/TS 15530-3:2004 Geometrical Product Specifications (GPS). Coordinate measuring machines (CMM): Technique for determining the uncertainty of measurement. Part 3: Use of calibrated workpieces or standards.
- Jakubiec W., Płowucha W. „Wyznaczanie niepewności pomiarów współrzędnościowych. Cz. 3. Zastosowanie przedmiotu wzorcowego”. *Mechanik*. 8–9 (2014): s. 113–121.