

Wyznaczanie nośności granicznej belki z defektem poddanej czteropunktowemu zginaniu – zagadnienia dwuwymiarowe

Limit loads for SEN(4PB) beam – two dimensional issues

MARCIN GRABA *

DOI: 10.17814/mechanik.2016.4.37

Wyjaśniono pojęcie nośności granicznej i omówiono numeryczną metodę jej wyznaczania na przykładzie zginanej czteropunktowo belki zawierającej szczelinę. Analizowano zależność nośności granicznej od granicy plastyczności oraz względnej długości pęknięcia zarówno przy dominacji płaskiego stanu naprężenia (PSN), jak i płaskiego stanu odkształcenia (PSO). Uzyskane rezultaty opisano formułami matematycznymi – zaproponowano wzory niezbędne do oszacowania (bez konieczności prowadzenia obliczeń MES) nośności granicznej belek SEN(4PB) zawierających pęknięcia.

SŁOWA KLUCZOWE: nośność graniczna, obciążenie graniczne, belka zginana, SEN(4PB), MES, PSN, PSO

A method of determination of the limit loads for four point bending beam with a crack is discussed in the paper. Accordingly, numerical model and numerical results for plane stress and plane strain dominance are presented. Also the effects of the yield stress and relative crack length are discussed. All numerical results are approximated using simple mathematical formulas. KEYWORDS: limit loads, bending beam, SEN(4PB), FEM, plane stress, plane strain

W wytrzymałości materiałów, w odniesieniu do belek zginanych, pojawia się pojęcie stanów granicznych. Należy rozróżnić [1]:

- **graniczny stan sprężysty**, czyli taki rozkład naprężeń w przekroju, że maksymalne naprężenie normalne w co najmniej jednym punkcie tego przekroju osiąga wartość równą granicy plastyczności σ_0 [1],
- **graniczny stan plastyczny**, czyli taki stan naprężeń w przekroju, że naprężenie normalne w całym przekroju osiąga wartość równą granicy plastyczności σ_0 [1].

Warto zaznaczyć, że w uplastycznionym przekroju powstaje przegub plastyczny przenoszący moment równy granicznemu momentowi plastycznemu przekroju, utożsamianemu z wartością momentu zginającego o takiej wartości, która jest wymagana do uplastycznienia całego przekroju [1].

Określenie stanów granicznych jest podstawą do definiowania nośności granicznej belek zginanych. **Graniczna nośność sprężysta**, określana też mianem granicznego obciążenia sprężystego, to taka wielkość obciążenia zewnętrznego (wyrażona przez pewien parametr obciążenia – np. moment zginający, siłę zginającą, względnie rozkład ciągły naprężenia), która w co najmniej jednym punkcie belki powoduje powstanie naprężenia normalnego równego granicy plastyczności σ_0 [1]. **Graniczna nośność plastyczna**, czyli graniczne obciążenie plastyczne, to wielkość obciążenia zewnętrznego wywołująca pełne

uplastycznienie przynajmniej jednego przekroju belki, co powoduje powstanie minimum jednego przegubu plastycznego [1]. Gdy belka zmienia się w mechanizm, mówi się o nośności granicznej utożsamianej z obciążeniem zewnętrznym powodującym uplastycznienie określonej liczby przekrojów (tj. powstanie określonej liczby przegubów plastycznych) umożliwiającą zmianę zachowania się konstrukcji [1]. W przypadku belek statycznie wyznaczalnych stan nośności granicznej zostaje osiągnięty (co oznacza zmianę belki w mechanizm), gdy w przekroju elementu konstrukcyjnego powstanie – po uzyskaniu przez obciążenie zewnętrzne wartości równej granicznemu obciążeniu plastycznemu – jeden przegub plastyczny [1].

Dla elementów konstrukcyjnych statycznie wyznaczalnych, pozbawionych jakichkolwiek defektów, wytrzymałość materiałów proponuje szereg prostych rozwiązań, które można wykorzystać w analizie inżynierskiej [1, 2]. Jeżeli jednak w elemencie konstrukcyjnym pojawi się defekt – w postaci pęknięcia wewnętrznego, pęknięcia na wskroś, pęknięcia krawędziowego lub pęknięcia narożnego – klasyczne metody wytrzymałości materiałów nie są odpowiednie. Należy wtedy sięgnąć do mechaniki pękania bądź do norm i katalogów gotowych rozwiązań, pozwalających na oszacowanie nośności granicznej elementów z różnymi defektami [3÷7]. Wiele z zaprezentowanych w pracach [3÷7] rozwiązań, bazujących na przeprowadzonych w latach 80. i 90. ubiegłego wieku analizach numerycznych i rozważaniach teoretycznych, zostało zweryfikowanych i doczekało się nowych, alternatywnych propozycji [8÷10] – w przeciwieństwie np. do modelu belki zginanej czystym momentem lub płyty z centralnym pęknięciem rozciąganej w dwóch kierunkach.

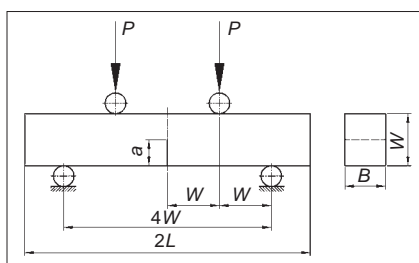
Obciążenia graniczne (nośność graniczna) są ważne nie tylko z punktu widzenia wytrzymałości konstrukcji. Dzięki odpowiedniemu wykorzystaniu nośności granicznej w konstruowaniu diagramów zniszczenia (FAD – *failure assessment diagrams*, CDF – *crack driving force*) [7] można przewidzieć zachowanie się konstrukcji z pęknięciem, gdy znane są obciążenie zewnętrzne i odporność na pęknięcie – parametr coraz częściej wykorzystywany na etapie projektowania konstrukcji [5, 11]. Takie podejście często wymaga idealizacji złożonych elementów konstrukcyjnych – modeluje się je za pomocą prostych płyt lub belek (zawierających pęknięcia), których nośność graniczną określa się za pomocą znanych wzorów [5]. Jest to zgodne z zaleceniami podanymi w procedurach FITNET [5].

Jednym z elementów, których nośności granicznej nie daje się wyznaczyć bezpośrednio ze znanych wzorów, jest belka poddawana czteropunktowemu zginaniu, zawierająca pęknięcie o długości a (rys. 1). W literaturze fachowej [3÷7] ten model belki oznacza się symbolem SEN (4PB) – *single edge notched plate in four-point bending*.

* Dr inż. Marcin Graba (mgraba@tu.kielce.pl) – Katedra Technologii Mechanicznej i Metrologii, Wydział Mechatroniki i Budowy Maszyn Politechniki Świętokrzyskiej

Zaprezentowany na rys. 1 sposób obciążenia gwarantuje, że w przekroju, w którym znajduje się pęknięcie, występuje zginanie belki czystym momentem gnącym o wartości $M_0 = P \cdot W$ (gdzie: P – siła zginająca, W – szerokość belki). Aby zatem ocenić nośność graniczną, trzeba znaleźć wartość siły P powodującą pełne uplastycznienie niepękniętego odcinka belki $b = W - a$. Do oszacowania tej siły (nośności granicznej) należy zastosować metody uwzględniające:

- różne charakterystyki materiałowe (wyrażone modułem Younga E , współczynnikiem Poissona ν oraz granicą plastyczności σ_0),
- różne względne długości pęknięcia a/W ,
- dominację płaskiego stanu naprężenia (PSN) lub płaskiego stanu odkształcenia (PSO).



Rys. 1. Model belki z pęknięciem o długości a , zginanej czteropunktowo – próbka typu SEN(4PB)

Przeprowadzenie odpowiedniej analizy powinno być zwieńczone podaniem wzoru pozwalającego na oszacowanie nośności granicznej – obciążenia granicznego P_0 – bez konieczności wykonywania jakichkolwiek obliczeń numerycznych:

$$P_0 = f(\text{stałe materiałowe}) \cdot f(\text{geometria}) \quad (1)$$

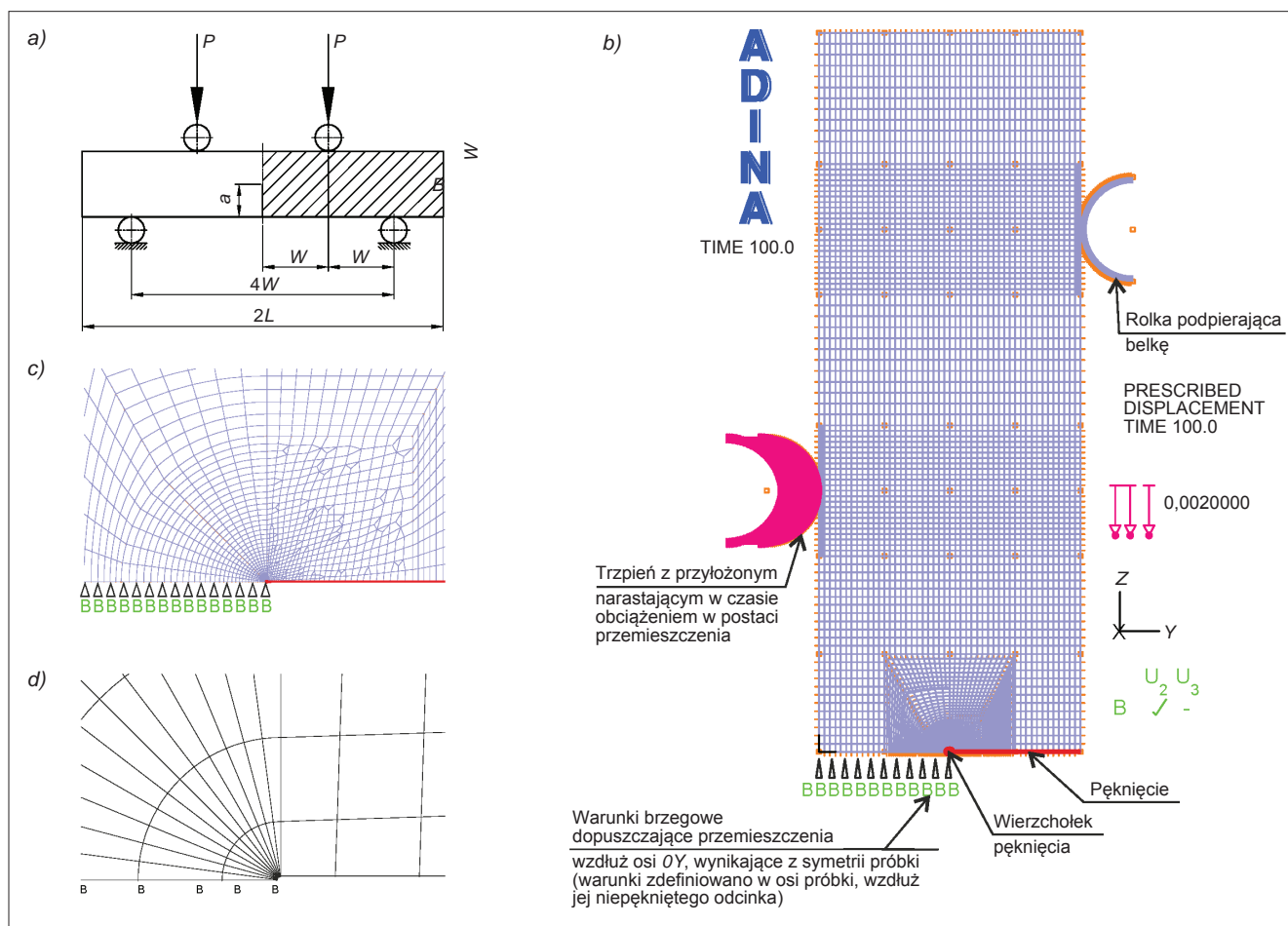
gdzie: P_0 – obciążenie graniczne, $f(\text{stałe materiałowe})$ – funkcja zależna od charakterystyki materiałowej belki, $f(\text{geometria})$ – funkcja uwzględniająca wszelkie elementy geometryczne belki (długość szczeliny, szerokość, grubość).

Metoda badania nośności granicznej

Ocenę nośności granicznej belki SEN(4PB) przeprowadzono z wykorzystaniem metody elementów skończonych (MES). Obliczenia numeryczne prowadzono w programie ADINA SYSTEM [12, 13]. Analizowano przypadki dominacji PSN lub PSO, bazując na opracowanych sparametryzowanych modelach belek zginanych. Podczas budowy modelu numerycznego postępowano według wskazówek zawartych w pracach [15, 16]. Ze względu na symetrię zamodelowano jedynie połowę belki ze szczeliną (w osi symetrii zdefiniowano odpowiednie warunki brzegowe).

W celu najlepszego odwzorowania rzeczywistego sposobu obciążania belki w warunkach laboratoryjnych jej obciążenie i podparcie realizowano z wykorzystaniem rolek (trzcieni, czopów, podpór itd.), co oznaczało konieczność rozwiązania zagadnienia kontaktowego. W związku z tym w modelu numerycznym zdefiniowano odpowiednie powierzchnie kontaktowe oraz grupy elementów skończonych.

W przypadku rozważanych belek SEN(4PB) zarówno rolęk obciążającą, jak i podparcie w postaci trzcienia zamodelowano jako połowę łuku o średnicy $\varnothing 16$ mm,

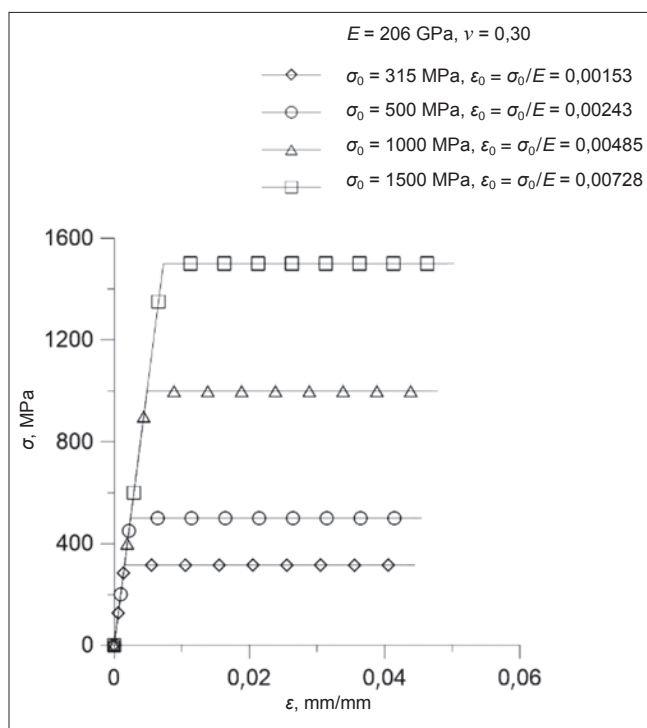


Rys. 2. Model numeryczny belki SEN(4PB): a) belka z zakreskowanym fragmentem, który poddano modelowaniu; b) pełny model numeryczny; c) obszar przywierzchołkowy; d) kształt wierzchołka pęknięcia

podzielonego na 90 równych dwuwęzłowych, kontaktowych elementów skończonych (co dało 91 węzłów na powierzchni kontaktowej). Do zdefiniowanej powierzchni kontaktowej realizującej obciążenie przykładano przemieszczenie liniowo narastające w czasie.

Wierzchołek pęknięcia zamodelowano jako ćwiartkę łuku o promieniu r_w równym $1 \div 5 \mu\text{m}$. To oznacza, że w promień wierzchołka pęknięcia był w skrajnych przypadkach 40000 i 8000 razy mniejszy od szerokości próbki. Wierzchołek pęknięcia podzielono na 12 części, z zagęszczeniem siatki elementów ku krawędziom powierzchni (w zależności od modelu elementy brzegowe były $5 \div 20$ razy mniejsze od największych elementów zlokalizowanych w centralnej części łuku). Wielkość promienia zaokrąglenia zależała od poziomu obciążenia zewnętrznego oraz od długości pęknięcia analizowanej w danym przypadku. W każdej próbce obszar przywierzchołkowy o promieniu ok. $1 \div 5 \text{ mm}$ podzielono na $36 \div 50$ elementów skończonych – najmniejszy, położony przy wierzchołku pęknięcia, był $20 \div 50$ razy mniejszy od ostatniego elementu i stanowił ok. $1/3024$ lub $1/10\,202$ szerokości próbki W , podczas gdy największy element modelujący obszar przywierzchołkowy stanowił ok. $1/151$ lub $1/240$ tej szerokości. Parametry modelu numerycznego były ściśle powiązane z analizowaną geometrią (typem próbki, długością pęknięcia), charakterystyką materiałową oraz obciążeniem zewnętrznym, a ponadto zależały odpowiednio od dominacji PSO lub PSN.

Obliczenia prowadzono przy założeniu małych odkształceń i małych przemieszczeń [14–16]. W przypadku dominacji PSO model MES wypełniono dziewięciowęzłowymi elementami skończonymi 2-D SOLID plane strain o interpolacji typu mixed z dziewięcioma punktami całkowania numerycznego (PCN), a w przypadku dominacji PSN zastosowano dziewięciowęzłowe elementy typu 2-D SOLID plane stress o interpolacji typu default z dziewięcioma PCN [12, 13]. Przykładowy model numeryczny wykorzystany do oszacowania nośności granicznej pokazano na rys. 2.



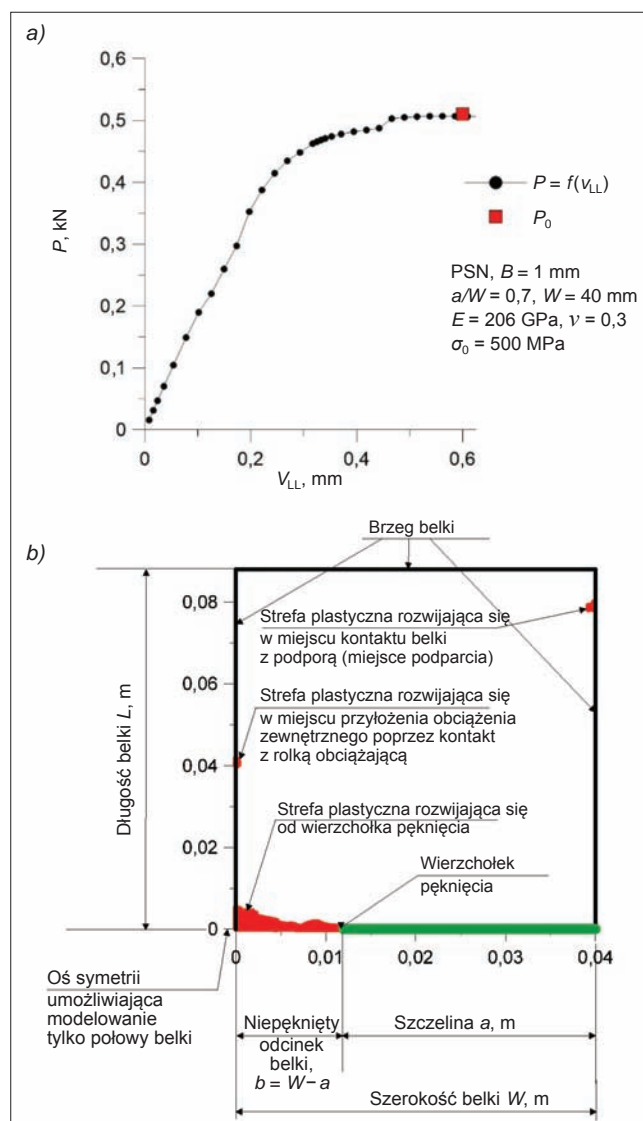
Rys. 3. Graficzna prezentacja modeli materiałów sprężysto-doskonale plastycznych wykorzystanych do oszacowania wartości obciążeń granicznych

W trakcie obliczeń numerycznych zakładano stałą szerokość próbek $W = 40 \text{ mm}$, a ich pozostałe wymiary zewnętrzne powiązano z tą szerokością. Nośność graniczną belek wyznaczano dla przypadków pęknięć o różnej długości a , tj. dla $a/W = 0,05; 0,20; 0,50; 0,70$. Założenie PSN lub PSO wpływało na określenie grubości belek. Zgodnie z zaleceniami twórców pakietu ADINA SYSTEM [12, 13] w modelach przyjmowano grubość $B = 1 \text{ mm}$ dla PSN oraz $B = 1 \text{ m}$ dla PSO. W analizie wykorzystano model materiału sprężysto-doskonale plastycznego, przy czym założono stałe wartości modułu Younga ($E = 206 \text{ GPa}$) i współczynnika Poissona ($\nu = 0,3$), natomiast zmieniano granicę plastyczności ($\sigma_0 = 315, 500, 1000, 1500 \text{ MPa}$). Na rys. 3 pokazano modelowe krzywe rozciągania wykorzystane w analizie numerycznej.

Pełna analiza obejmowała 32 modele numeryczne różniące się granicą plastyczności σ_0 , względną długością pęknięcia a/W oraz dominacją PSN lub PSO.

Numeryczne wyniki obliczeń nośności granicznej

Pełna analiza numeryczna mająca na celu oszacowanie nośności granicznej belki z defektem zginanej czteropunktowo wymagała również przeanalizowania rozmiarów i kształtu strefy plastycznej – rozszerzającej się



Rys. 4. Przykładowy wykres siły P w funkcji przemieszczenia punktu przyłożenia siły V_{LL} (a) oraz przykładowy kształt strefy plastycznej w momencie osiągnięcia przez belkę stanu nośności granicznej P_0 (b)

pod wpływem obciążenia zewnętrznego – oraz wykresów siły P obciążającej belkę w funkcji przemieszczenia punktu przyłożenia siły v_{LL} . Przykładowy wykres $P = f(v_{LL})$ z zaznaczonym punktem, w którym stwierdzono pełne uplastycznienie niepękniętego odcinka belki, pokazano na rys. 4a, a na rys. 4b – strefę plastyczną w momencie osiągnięcia przez belkę stanu nośności granicznej.

Jako nośność graniczną P_0 przyjmowano wartość siły powodującą pełne uplastycznienie niepękniętego odcinka belki (rys. 4b). Wartość siły przy odpowiednim poziomie obciążenia zewnętrznego odczytywano z wykresu $P = f(v_{LL})$. Zestawienie wyników numerycznych zaprezentowano w tabl. I.

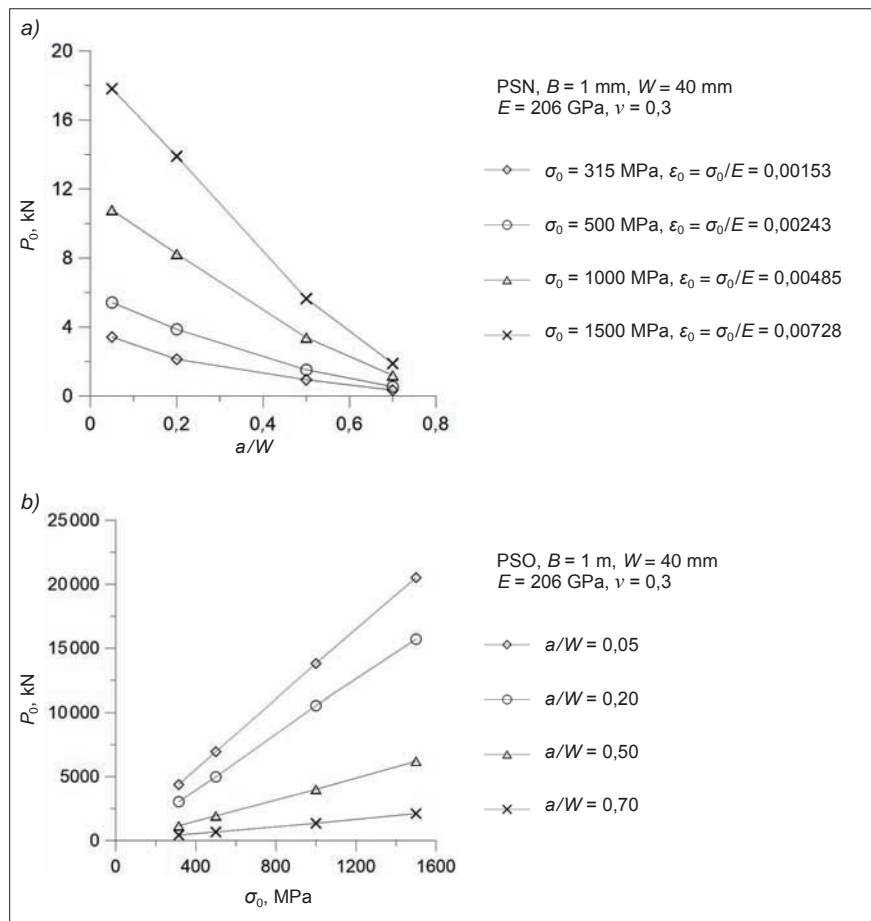
Na rys. 5 zaprezentowano wpływ względnej długości pęknięcia a/W oraz granicy plastyczności σ_0 na nośność graniczną belek SEN(4PB), odpowiednio przy założeniu PSN i PSO. Analiza wyników prowadzi do wniosków:

- im dłuższe pęknięcie, tym mniejsza wartość obciążenia granicznego,
- im wyższa granica plastyczności, tym proporcjonalnie wyższa wartość obciążenia granicznego.

Po odniesieniu otrzymanych wartości nośności granicznej do tej samej wartości grubości B okazało się, że nośność graniczna (obciążenie graniczne) jest niższa dla przypadku PSN, co oznacza mniejsze (nawet o 30%) dopuszczalne obciążenie konstrukcji niż przy założeniu PSO. W literaturze fachowej [3,5÷7,17] zaleca się, aby w ocenie wytrzymałości konstrukcji z defektami brać pod uwagę wartości obciążeń granicznych (nośności granicznej) dla przypadku dominacji PSN (o ile procedura oceny wytrzymałości nie zakłada odmiennego podejścia) – prowadzi to do uzyskiwania bezpiecznych rezultatów. Alternatywą byłoby rozpatrywanie nośności granicznej dla przypadków trójwymiarowych.

TABLICA I. Zestawienie numerycznie wyznaczonych wartości nośności granicznej (w kN) – obciążeń granicznych dla belek typu SEN(4PB) dla przypadków PSN i PSO

σ_0 , MPa	PSN, $B = 1$ mm				PSO, $B = 1$ m			
	a/W							
	0,05	0,20	0,50	0,70	0,05	0,20	0,50	0,70
315	3,41881	2,13701	0,944699	0,341378	4384,58	3040,00	1156,88	431,349
500	5,42291	3,86894	1,52131	0,544935	6948,79	4984,00	1932,30	673,745
1000	10,7835	8,24141	3,38542	1,19912	13800,70	10545,30	4003,32	1354,19
1500	17,8123	13,9006	5,65047	1,88484	20522,00	15704,10	6198,41	2111,62



Rys. 5. Wpływ względnej długości pęknięcia a/W na obciążenie graniczne P_0 belek SEN(4PB) – PSO (a); wpływ granicy plastyczności σ_0 na obciążenie graniczne P_0 belek SEN(4PB) – PSN (b)

Związek między obciążeniem granicznym P_0 i granicą plastyczności σ_0 ma charakter liniowy (rys. 5b), natomiast w przypadku zależności P_0 i względnej długości pęknięcia a/W liniowość zanika wraz ze wzrostem długości pęknięcia (rys. 5a). To zjawisko braku liniowości jest charakterystyczne przede wszystkim dla belek zawierających bardzo długie pęknięcia ($a/W = 0,70$). Wielu badaczy wskazywało, że jest to zdezeterminowane przez rozwijającą się strefę plastyczną – od brzegu próbki w kierunku wierzchołka pęknięcia, na skutek tworzenia się przegubu plastycznego blisko brzegu. Potwierdzono to również w pracy [18] dotyczącej analizy sprężysto-plastycznych pól naprężeń.

Aproksymacja wyników nośności granicznej

Otrzymane wyniki numeryczne poddano aproksymacji. Wykorzystując algorytm przedstawiony w procedurach EPRI, wzór na oszacowanie obciążenia granicznego (nośności granicznej) P_0 belek SEN(4PB) można zapisać następująco:

$$P_0 = B \cdot \sigma_0 \cdot f(a/W) \quad (2)$$

Funkcja $f(a/W)$ ma postać:

$$f(a/W) = A_1 \cdot (a/W)^3 + A_2 \cdot (a/W)^2 + A_3 \cdot (a/W) + A_4 \quad (3)$$

gdzie współczynniki dopasowania wynoszą odpowiednio: dla PSN – $A_1 = 0,01594$, $A_2 = -0,01121$, $A_3 = -0,01577$, $A_4 = 0,01228$; dla PSO – $A_1 = 0,02104$, $A_2 = -0,01385$, $A_3 = -0,01971$, $A_4 = 0,01476$.

Współczynnik dopasowania R^2 wynosi odpowiednio 0,952 dla PSN i 0,995 dla PSO.

Średni błąd aproksymacji numerycznych wyników nośności granicznej wynosi: 7% – w przypadku PSN, 2% – w przypadku PSO.

Można zaproponować inną formę aproksymacji, bazującą na równaniu:

$$P_0 = B \cdot b \cdot \sigma_0 \cdot f(\sigma_0/E, a/W) \quad (4)$$

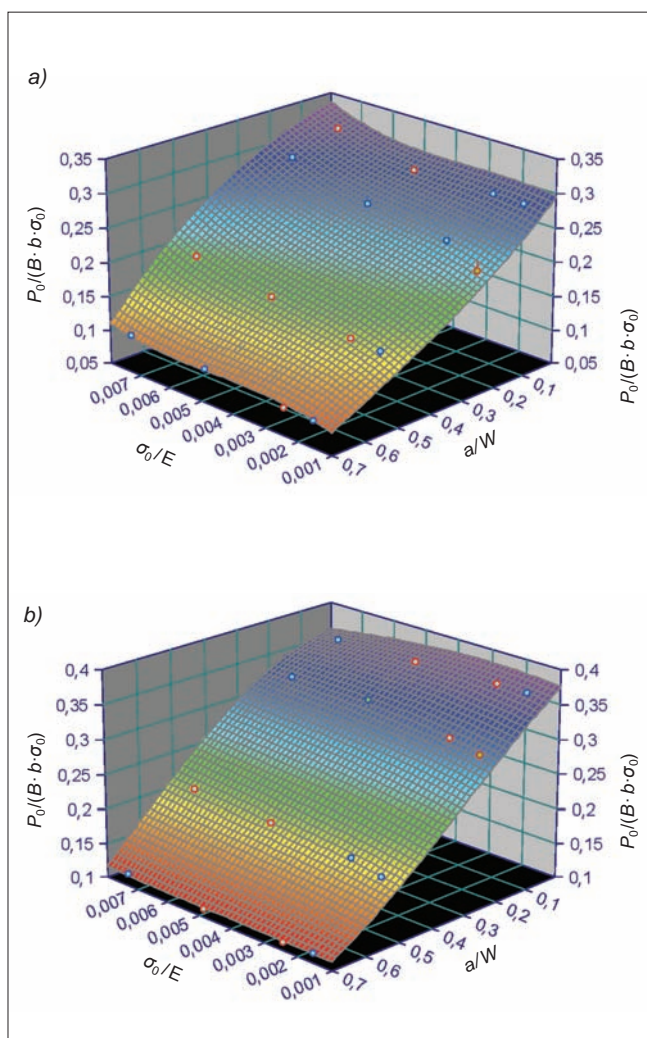
gdzie b jest długością niepękniętego odcinka belki ($b = W - a$).

Funkcję $f(\sigma_0/E, a/W)$ można wyznaczyć za pomocą programu Table Curve 3D [19], przez aproksymację powierzchni krzywoliniowej f równaniem postaci:

$$f(\sigma_0/E, a/W) = A_1 + A_2 \cdot (\sigma_0/E) + A_3 \cdot (a/W) + A_4 \cdot (\sigma_0/E)^2 + A_5 \cdot (a/W)^2 + A_6 \cdot (\sigma_0/E) \cdot (a/W) + A_7 \cdot (\sigma_0/E)^3 + A_8 \cdot (a/W)^3 + A_9 \cdot (\sigma_0/E) \cdot (a/W)^2 + A_{10} \cdot (\sigma_0/E)^2 \cdot (a/W) \quad (5)$$

gdzie współczynniki aproksymacyjne $A_1 \dots A_{10}$ mają wartości podane w tabl. II.

Trójwymiarowe wykresy wykorzystane do aproksymacji rezultatów numerycznych wzorami (4) i (5) pokazano na rys. 6.



Rys. 6. Graficzna prezentacja powierzchni $P_0/(B \cdot b \cdot \sigma_0) = f(\sigma_0/E, a/W)$ do aproksymacji rezultatów numerycznych wzorami (4) i (5): a) PSN, b) PSO

TABLICA II. Współczynniki dopasowania równania (5) do otrzymanych wyników numerycznych

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
PSN $R^2 = 0,9945$	0,285494	14,92728	-0,49835	-4394,28	0,364699
PSO $R^2 = 0,9991$	0,368402	9,001908	-0,35141	-1740,74	-0,24739
	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
PSN $R^2 = 0,9945$	61,33157	416 171,4	-0,15421	-65,8381	-2004,34
PSO $R^2 = 0,9991$	27,3465	60 460,24	0,317	-50,6691	1343,641

Wykorzystanie tych wzorów do oszacowania nośności granicznej powoduje, że rozwiązanie jest obciążone maksymalnym błędem na poziomie: 7% – dla PSN, 2% – dla PSO. Średnie błędy dopasowania dla przypadków PSN i PSO wynoszą odpowiednio 2,47% i 1,01%.

Podsumowanie

W pracy badano zginaną czteropunktowo belkę zawierającą defekt – pęknięcie, zdominowaną przez PSN lub PSO. Zaprezentowano numeryczną metodę oszacowania nośności granicznej (obciążenia granicznego) belki typu SEN(4PB) – geometrii, która jest zalecana do idealizacji złożonych obiektów konstrukcyjnych zgodnie z procedurami FITNET [5]. Analizę prowadzono pod kątem oceny wpływu granicy plastyczności oraz względnej długości pęknięcia na nośność graniczną. Wykazano, że nośność graniczna zależy od tego, czy występuje PSN, czy PSO. Rezultaty numeryczne posłużyły do stworzenia prostych formuł pozwalających na oszacowanie nośności granicznej bez konieczności prowadzenia obliczeń MES. Wzory te mogą być przydatne w rozwiązywaniu inżynierskich problemów z zakresu wytrzymałości konstrukcji zawierających pęknięcia.

Pracę wykonano w ramach realizacji projektu badawczego IU-VENTUS PLUS o numerze IP2012 011872, finansowanego ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

LITERATURA

- German J. „Wytrzymałość materiałów”. Konspekty wykładów dla studentów studiów dziennych (kierunek: budownictwo): limba.wil.pk.edu.pl/~jg. Kraków 2005.
- Niezgodziński M.E., Niezgodziński T. „Wzory, wykresy i tablice wytrzymałościowe”. Warszawa: PWN, 1977.
- Kumar V., German M.D., Shih C.F. “An engineering approach for elastic-plastic fracture analysis”. Electric Power Research Institute, Inc. Palo Alto, CA (1981), EPRI Report NP-1931, 1981.
- SINTAP: Structural Integrity Assessment Procedures for European Industry. Final Procedure, Brite-Euram Project No BE95-1426 – Rotherham: British Steel, 1999.
- FITNET Report (European Fitness-for-service Network), edited by M. Kocak, S. Webster, J.J. Janosch, R.A. Ainsworth, R. Koers, Contract No. G1RT-CT-2001-05071, 2006.
- API 2000, American Petroleum Institute, API 579: Recommended practice for fitness-for-service. Washington DC.

7. Neimitz A., Dzioba I., Graba M., Okrajni J. "The assessment of the strength and safety of the operation high temperature components containing crack". Kielce: Kielce University of Technology Publishing House, 2008.
8. Chauhan S., Chattopadhyay J., Dutta B.K. "Limit Load Equations for Miniature Single Edge Notched Tensile Specimens". *Transactions of the Indian Institute of Metals*. Vol. 69, Iss. 2 (2016): pp. 641-646.
9. Graba M. "Numerical verification of the limit load solutions for single edge notch specimen in tension". *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. Vol. 13, No. 1 (2013): pp. 45-56.
10. Graba M. "Extension of the concept of limit loads for 3D cases for a centrally cracked plate in tension". *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. Vol. 51, No. 2 (2013): pp. 349-362.
11. PN-EN 1993 Eurokod 3: Konstrukcje stalowe.
12. ADINA, 2008a, ADINA 8.7.3: ADINA: Theory and Modeling Guide – Vol. I: ADINA, Report ARD 08-7, ADINA R&D, Inc., 2008.
13. ADINA 2008b, ADINA 8.7.3: ADINA: User Interface Command Reference Manual – Vol. I: ADINA Solids & Structures Model Definition, Report ARD 08-6, ADINA R&D, Inc., 2008.
14. Graba M., Gałkiewicz J. "Influence of the Crack Tip Model on Results of the Finite Element Method". *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. Vol. 45, No. 2 (2007): pp. 225-237.
15. Brocks W., Cornec A., Scheider I. "Computational Aspects of Nonlinear Fracture Mechanics". In: "Bruchmechanik". Geesthacht (Germany): GKSS-Forschungszentrum, Elsevier (2003), pp. 127-209.
16. Brocks W., Scheider I. "Reliable J-Values. Numerical Aspects of the Path-Dependence of the J-integral in Incremental Plasticity". In: "Bruchmechanik". Geesthacht (Germany): GKSS-Forschungszentrum, Elsevier, 2003, pp. 127-209.
17. Anderson T.L. "Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications". Boca Raton, Florida: CRC Press, Corporate Blvd., N.W., 2000.
18. Chao Y.J., Zhu X.K., Kim Y., Lar P.S., Pechersky M.J., Morgan M.J. "Characterization of Crack-Tip Field and Constraint for Bending Specimens under Large-Scale Yielding". *International Journal of Fracture*. Vol. 127 (2004): pp. 283-302.
18. Table Curve 3D ver. 4.00, 2002. ■