



$$\sum_i c_i u[n-i] = \sum_j d_j y[n-j] \quad (2)$$

Oprogramowanie symulacyjne wykorzystuje przedstawione równanie ogólne (2) do wyznaczania odpowiedzi modelowanych członów na zadane na ich wejścia wymuszenia sygnałowe. Zasadniczą strukturę klasy tworzą: główna funkcja obliczeniowa i trzy tablice dwuwymiarowe – bufor sygnałów **U** oraz macierze **K** i **P**. Konstruktor klasy, korzystając z funkcji opisujących podstawowe, regulacyjne i korekcyjne człony automatyki, przekształca parametry elementów ciągłych w zbiór współczynników różnicowych i umieszcza je w macierzy **K**. Ponieważ wszystkie zdefiniowane w klasie człony stanowią układy co najwyżej rzędu drugiego, wyrażenie (2) może zostać zredukowane:

$$y[n] = c_0 u[n] + c_1 u[n-1] + c_2 u[n-2] + d_1 y[n-1] + d_2 y[n-2] \quad (3)$$

i taką jego postać przyjęto do implementacji.

Zarządzanie logiką połączeń realizowane jest w oparciu o macierz przejść **P**. Możliwe jest budowanie wielopoziomowych modeli układów sterowania o nieograniczonej (ściślej: ograniczonej ilością dostępnej pamięci) skali złożoności. Dostęp do każdego zdefiniowanego sygnału jest zapewniony w dowolnie wybranej chwili czasu (cyklu obliczeń), a wartości wszystkich zmiennych mogą być rejestrowane, wizualizowane i modyfikowane według potrzeb.

Postać równania (3) determinuje strukturę macierzy danych **U**, **K** i **P**. Macierz współczynników **K** stanowi dwuwymiarowa tablica o sześciu kolumnach i liczbie wierszy w zależności od liczby członów wchodzących w skład analizowanego układu. W ogólności przyjmuje ona postać:

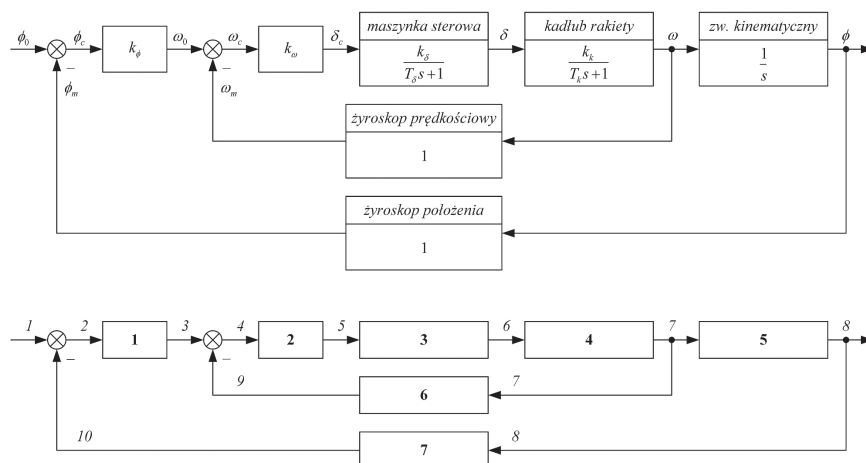
$$\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{w \times 6} : \mathbf{K} = \begin{bmatrix} c_0^1 & c_1^1 & c_2^1 & d_0^1 & d_1^1 & d_2^1 \\ c_0^2 & c_1^2 & c_2^2 & d_0^2 & d_1^2 & d_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_0^w & c_1^w & c_2^w & d_0^w & d_1^w & d_2^w \end{bmatrix} \quad (4)$$

Indeks górny współczynników macierzy **K** odnosi się do identyfikatorów (numerów) członów układu, indeks dolny – do indeksów współczynników równania (3). Ponieważ  $d_0^l = 1$ ,  $l \in \{1, 2, \dots, w\}$ , czwarta kolumna macierzy **K** złożona jest z samych jedynek.

Każdy wiersz macierzy **U** stanowi pojedynczy bufor typu FIFO i służy do przechowywania wartości sygnału  $u_w$  z chwili bieżącej i dwóch poprzednich. Liczba wierszy w zależna jest od liczby sygnałów w układzie. W przypadku ogólnym:

$$\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{w \times 3} : \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1[n] & u_1[n-1] & u_1[n-2] \\ u_2[n] & u_2[n-1] & u_2[n-2] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_w[n] & u_w[n-1] & u_w[n-2] \end{bmatrix} \quad (5)$$

Macierz przejść **P** jest czterokolumnową tablicą definiującą zależności sygnałowe pomiędzy członami analizowanego układu sterowania. Przechowuje informacje dotyczące modelowanej struktury, a poprawne określenie jej zawartości warunkuje właściwy obieg sygnałów. Każdy wiersz macierzy **P** opisuje pojedynczy przepływ sygnału przez zadany człon. Numer członu stanowi jego identyfikator i jest jedno-



Rys. 2. Schemat układu stabilizacji kadłuba rakiety w kącie przechylenia: a) schemat blokowy, b) mapa identyfikatorów

cznie odnośnikiem do wiersza macierzy współczynników **K**. Z kolei numery sygnałów pozwalają w analogiczny sposób identyfikować sygnały w buforze **U**. Opracowany system znaczników zapewnia poprawną dystrybucję sygnałów w ramach struktury analizowanego układu.

Zasada działania instancji klasy jest następująca: w pierwszej kolejności, po utworzeniu obiektu i wykonaniu kodu konstruktora, wywoływana jest funkcja inicjująca, odpowiedzialna za analizę logiczną poprawności struktury układu, generowanie map identyfikatorów członów i sygnałów, alokację pamięci oraz wypełnienie macierzy **U**, **P** i **K** danymi. Po wykonaniu zadań przygotowawczych uruchamiana jest główna pętla obliczeniowa, w ramach której realizowane są następujące operacje:

- przesunięcie próbek w buforze **U**,
- wyznaczenie wartości zmiennych parametrów symulacji,
- wyznaczenie nowych wartości współczynników macierzy **K** (według potrzeb),
- wyznaczenie nowych wartości sygnałów w buforze **U** na podstawie bieżącego stanu macierzy **U**, **K** i **P** oraz równania (3),
- wyprowadzenie bieżącej zawartości bufora **U** (do analiz i wizualizacji),
- wykonanie innych operacji na sygnałach (według potrzeb).

### Przykładowy model symulacyjny

Uproszczony na potrzeby referatu układ stabilizacji kadłuba rakiety w kącie przechylenia  $\phi$  (rys. 2) został zestawiony przy użyciu narzędzi projektowania graficznego. Wyniki badań numerycznych przedstawiono na rys. 3. Dane liczbowe do symulacji:  $k_\phi = 14$ ;  $k_\omega = 2$ ;  $k_k = 10$ ;  $k_\delta = 0,1$ ;  $T_k = 0,1$  s;  $T_\delta = 0,02$  s, czas symulacji  $t_s = 1$  s, czas próbkowania  $t_p = 1$  ms.

### Weryfikacja poprawności obliczeń

W celu wykazania poprawności symulacji numerycznych przedstawione zostaną wyniki obliczeń przeprowadzonych metodami analitycznymi.

Po dokonaniu kolejnych przekształceń schematu blokowego z rys. 2 i wyznaczeniu metodą Cardano pierwiastków równania charakterystycznego  $N(s)$  możliwe jest zapisanie transmitancji zastępczej  $G(s)$  rozpatrywanego układu w postaci:

$$G(s) = \frac{k}{N(s)} = \frac{k}{(s + \sigma_a)(s + \sigma_b + j\omega_b)(s + \sigma_b - j\omega_b)} \quad (6)$$

gdzie:  $k = k_\phi k_\omega k_\delta k_k$

$$\sigma_a = v_0 + v_1 - \frac{T_\delta + T_k}{3T_\delta T_k}$$

$$\sigma_b = -\left(\frac{v_0 + v_1}{2} + \frac{T_\delta + T_k}{3T_\delta T_k}\right)$$

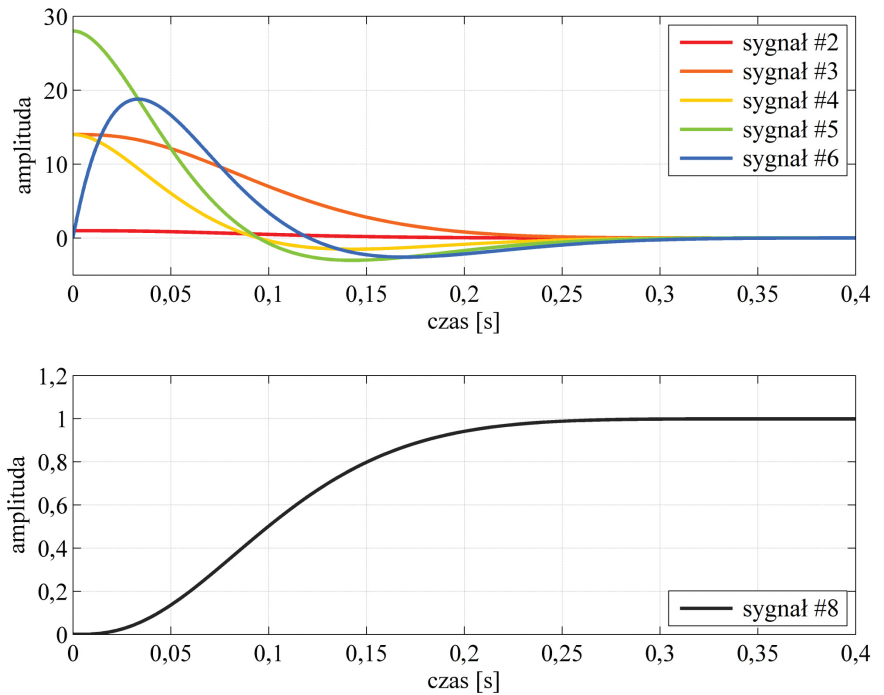
$$\omega_b = \frac{\sqrt{3}}{2}(v_0 - v_1)$$

$$v_{0,1} = \sqrt[3]{\frac{-q \pm \sqrt{\Delta_v}}{2}}$$

$$\Delta_v = q^2 + \frac{4}{27}p^3$$

$$p = \frac{k_\omega k_\delta k_k + 1}{T_\delta T_k} - \frac{1}{3} \left(\frac{T_\delta + T_k}{T_\delta T_k}\right)^2$$

$$q = \frac{2}{27} \left(\frac{T_\delta + T_k}{T_\delta T_k}\right)^3 + \frac{k}{T_\delta T_k} - \frac{1}{3} \frac{(T_\delta + T_k)(k_\omega k_\delta k_k + 1)}{(T_\delta T_k)^2}$$



Rys. 3. Przebiegi sygnałów w wybranych gałęziach układu z rys. 2 otrzymane w wyniku badania odpowiedzi na wymuszenie skokowe  $x(t) = 1(t)x_{st}$

Odpowiedź układu na wymuszenie skokowe  $x(t) = 1(t)x_{st}$  wynosi:

$$y(t) = \mathbb{L}^{-1} \left\{ \frac{k}{s(s + \sigma_a)(s + \sigma_b + j\omega_b)(s + \sigma_b - j\omega_b)} \right\} x_{st} \quad (7)$$

poszukiwany oryginał funkcji ma postać:

$$y(t) = k \left[ A_0 + A_1 e^{-\sigma_a t} + 2|A_2| e^{-\sigma_b t} \cos(\omega_b t + \arg(A_2)) \right] x_{st} \quad (8)$$

gdzie:  $\sigma_a = -20$ ,  $\sigma_b = -20$ ,  $\omega_b = 10\sqrt{3}$ ,  $k = 28$ ,

$$A_0 = 0,0357, \quad A_1 = -0,0833, \quad |A_2| = 0,0315, \quad \arg(A_2) = 0,7135.$$

Wykres funkcji (8) jest zgodny z wyznaczonym symulacyjnie przebiegiem sygnału 8 (rys. 3), błąd średniokwadratowy z wartości numerycznych odniesionych do wartości wyrażenia (8) przyjmuje wartość  $\vartheta = 2,33 \cdot 10^{-7}$  dla czasu próbkowania  $t_p = 1$  ms.

## Podsumowanie

W artykule opisano zasadę działania klasy przeznaczonej do wspomagania badań struktur układów stabilizacji rakiet przeciwlotniczych. Klasa umożliwia modelowanie złożonych układów automatyki oraz prowadzenie analiz przebiegu sygnałów. Poprawność wyników potwierdzono metodami analitycznymi.

Opracowane narzędzie zorientowane jest na modelowanie członów ciągłych, co zostało uwarunkowane jego planowanym zastosowaniem. Otwarta struktura klasy umożliwia jednak dowolne rozszerzanie jej funkcjonalności.

\* \* \*

Wykonano w ramach realizacji pracy RMN nr 755/2015, finansowanej przez Wydział Mechatroniki i Lotnictwa Wojskowej Akademii Technicznej.

## LITERATURA

1. Bużantowicz W., Miernik J., Pietrasieński J. „Modelowanie i aproksymacja funkcji przenoszenia maszyny sterowych rakiety przeciwlotniczej”. *Mechanik* 88 (2015)7, s. 83÷92 (CD).
2. Cannon R. „Dynamika układów fizycznych”. Warszawa: WNT, 1973.
3. Cruz J. „Układy ze sprzężeniem zwrotnym”. Warszawa: PWN, 1977.
4. Kaczorek T. „Macierze w automatyce i elektrotechnice”. Warszawa: WNT, 1984.
5. Mrozek B., Mrozek Z. „Matlab i Simulink. Poradnik użytkownika”. Gliwice: Helion, 2010.
6. Ogata K. „Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania”. Warszawa: WNT, 1974.
7. Pietrasieński J., Podciechowski M., Bużantowicz W., Grzywiński S. „Symulator OPL – oprogramowanie do oceny skuteczności przeciwlotniczych zestawów raketowych”. *Materiały 8. Konferencji „Urządzenia i systemy radioelektroniczne” (UISR 2015)*, Jachranka (Polska), 27÷29.10.2015, s. 18/1÷12 (CD).
8. Piatek R. „Matlab i Simulink w automatyce przemysłowej”. *Automatyka* 1 (2015)3, s. 126÷129.
9. Rudra P. „Matlab 7 dla naukowców i inżynierów”. Warszawa: PWN, 2007.
10. Siouris G. „Missile Guidance and Control Systems”. New York: Springer, 2004.
11. Yanushevsky R. „Modern Missile Guidance”. London, New York: Taylor & Francis, 2007.
12. Zarchan P. „Tactical and Strategic Missile Guidance”. Washington: AIAA, 2012.
13. Żelazny M. „Podstawy automatyki”. Warszawa: PWN, 1976. ■