

# Analiza drgań poprzecznych złożonego układu kołowo-symetrycznego z uwzględnieniem właściwości cyklicznej symetrii

Examination of a transverse complex circular symmetry system showing cyclic symmetry feature

STANISŁAW NOGA  
FELIKS STACHOWICZ\*

DOI: 10.17814/mechanik.2016.4.44  
Artykuł z XIII Forum Inżynierskiego ProCAx 2015

Rozważano drgania poprzeczne koła zębatego traktowanego jako płyta kołowo-symetryczna o złożonej geometrii. Zaprezentowano metodykę budowy uproszczonych modeli MES koła zębatego z uwzględnieniem właściwości cyklicznej symetrii układu. Omówiono badania doświadczalne wykonane w celu oceny zaproponowanej metodyki budowy modeli MES układu.

**SŁOWA KLUCZOWE:** drgania poprzeczne, układy kołowo-symetryczne, koła zębate, modele z cykliczną symetrią

*Discussed in the paper are transverse vibrations of toothed gear representing circular plate of complex geometry. A method is suggested how to generate a simplified FE model of the gear duly considering cyclic symmetry modelling technique. Experimental studies conducted in order to evaluate the proposed method of making FE models are discussed.*

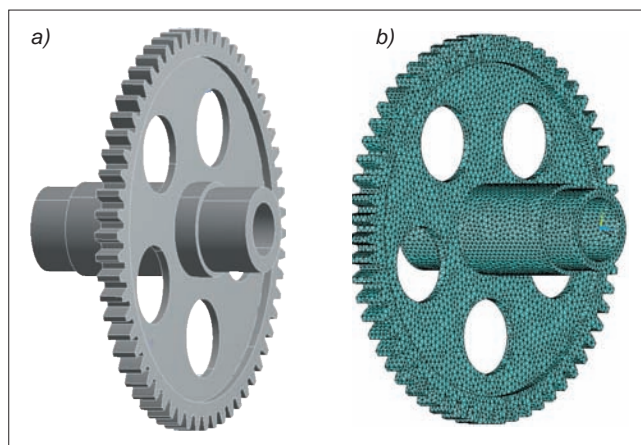
**KEYWORDS:** transverse vibration, circular symmetry system, toothed gear, cyclic symmetry modelling

Zagadnienia drgań poprzecznych płyt kołowo-symetrycznych są przedmiotem zainteresowania wielu badaczy i ośrodków badawczo-rozwojowych [1÷6]. Wynika to z faktu, że niektóre wirujące układy (dyski turbin, koła zębate, koła kolejowe) mogą być rozważane jako płyty kołowo-symetryczne o złożonej geometrii. W pracach [2÷4] autorzy badali drgania poprzeczne kół zębatych z wykorzystaniem metody elementów skończonych (MES). Problemy dotyczące stosowania modeli uproszczonych MES kół zębatych do analizy drgań omówiono w [2, 3]. W pracach [2, 5] dyskutowano także zagadnienia dotyczące wykorzystania w procesie modelowania właściwości wynikających z cyklicznej symetrii układu.

Przedmiotem rozważań w niniejszej publikacji są drgania poprzeczne koła zębatego przekładni lotniczej. Celem autorów było opracowanie modelu uproszczonego, który w zadowalającym stopniu odzwierciedlałby właściwości dynamiczne rozważanego koła.

## Sformułowanie problemu

Przyjęty do rozważań układ stanowi koło zębate przedstawione na rys. 1a. Podstawowe dane techniczne i wymiary koła zaczerpnięto z prac [2, 3]. Koło składa się z płyty pierścieniowej z wieńcem, osadzonej na drażonym wale. Tarcza koła zawiera nieciągłości geometryczne w postaci otworów przelotowych (rys. 1).



Rys. 1. Rozważane koło zębate (a) i jego model MES (b)

W proponowanych modelach uproszczonych wieńiec zębaty koła sprowadza się do postaci jednorodnego pierścienia – dzięki temu w procesie modelowania można wykorzystać właściwości cyklicznej symetrii układu. W pracy zaprezentowano wyniki obliczeń dotyczących drgań własnych poprzecznych z uwzględnieniem prędkości wirowania koła.

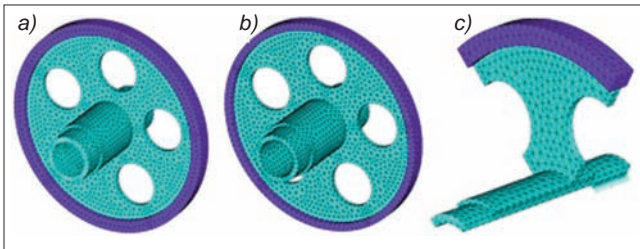
## Modele numeryczne MES rozważanego układu

Rozważano trzy uproszczone modele MES koła. Pierwsze dwa modele różnią się tylko wysokością obrzeża. W pierwszym modelu średnica zewnętrzna jest równa średnicy podziałowej koła, w drugim średnica zewnętrzna jest równa średnicy stóp koła, a w trzecim wykorzystano właściwości cyklicznej symetrii układu. Model ten stanowi jedną piątą część pierwszego modelu uproszczonego. Aby uzyskać wystarczającą zgodność właściwości dynamicznych modeli i modelowanego koła, zmodyfikowano właściwości fizyczne obrzeży. W pierwszym i trzecim modelu uproszczonym przyjęto, że wieńiec ma taką samą masę właściwą jak koło, a moduł Younga wyznaczono w symulacji numerycznej – tak, aby uzyskać zgodność wartości częstości własnych modelu i koła [2]. W drugim modelu uproszczonym moduł Younga oraz gęstość masową obrzeża wyznaczono w symulacji numerycznej. Jakość modeli uproszczonych ocenia się na podstawie błędów częstości, wyznaczanego ze wzoru [1, 2, 4]:

$$\varepsilon = (\omega_f - \omega_e) / \omega_e \times 100\%$$

gdzie:  $\varepsilon$  – błąd częstości,  $\omega_f$  – częstość własna modelu uproszczonego,  $\omega_e$  – wartość odniesienia częstości własnej.

\* Dr inż. Stanisław Noga (noga@prz.edu.pl) – Katedra Konstrukcji Maszyn Politechniki Rzeszowskiej; prof. dr hab. inż. Feliks Stachowicz (stafe@prz.edu.pl) – Katedra Przeróbki Plastycznej Politechniki Rzeszowskiej



Rys. 2. Uproszczone modele MES: a) pierwszy (zawierający 19725 elementów), b) drugi (zawierający 17067 elementów), c) trzeci (zawierający 3984 elementy)

Referencyjne wartości częstości drgań własnych poprzecznych koła uzyskano z rozwiązania numerycznego dla modelu MES koła (modelu odniesienia) uwzględniającego istotne detale konstrukcyjne rozważanego układu. Wszystkie opracowane modele poddano procesowi dyskretyzacji z wykorzystaniem standardowych procedur programu ANSYS. Zastosowano elementy czworokątne (solid187), dziesięciowęzłowe, o trzech stopniach swobody w każdym węźle. Model referencyjny MES, zawierający 93 423 elementy skończone, pokazano na rys. 1b. Uproszczone modele MES przedstawiono na rys. 2. Pierwszy z nich składał się z 19 725, drugi – z 17 067, a trzeci (model z cykliczną symetrią) – z 3984 elementów.

Obliczenia prowadzono do momentu wyznaczenia częstości własnej  $\omega_{18}$ . Rozkład naprężeń wynikający z wirowania uzyskano w pierwszym kroku obliczeniowym – analizie statycznej. Następnie ten rozkład uwzględniono w kolejnym kroku obliczeniowym – analizie modalnej [1÷4].

### Analiza numeryczna

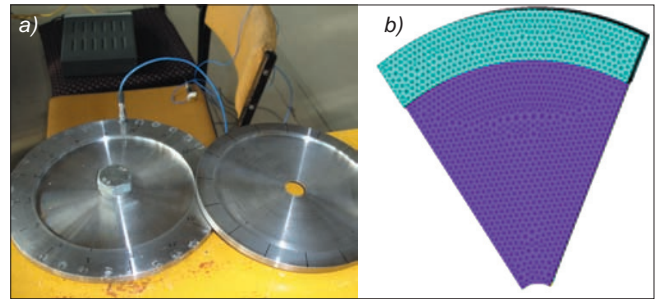
Obliczenia numeryczne prowadzono dwuetapowo. W pierwszej fazie obliczeń założono, że koło i modele obracają się z prędkością kątową  $\theta_0 = 80$  rad/s. Najlepsze rezultaty uzyskano dla trzeciego modelu uproszczonego. W drugiej fazie zweryfikowano modele uproszczone z uwzględnieniem efektu wirowania. Obliczenia prowadzono przy założeniu, że koło obraca się z prędkością  $\theta_0 = 1047$  rad/s, co odpowiada wysokiej prędkości wirowania. Jak należało się spodziewać, najlepsze rezultaty uzyskano dla trzeciego modelu uproszczonego (tabl. I). Rozwiązania odnoszące się do pięciu średnic węzłowych były dwójakie – charakteryzowały się różnymi wartościami częstości własnych i różnymi postaciami drgań własnych. Zagadnienie to szerzej omówiono w pracach [2, 3].

TABLICA I. Wartości błędu częstości  $\varepsilon_{mn}$  [%] (trzeci model uproszczony,  $\theta_0 = 1047$  rad/s)

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-1,49	0,16	1,40	0,21	-0,08	-0,15 -0,37	-1,74	2,60	2,61
2	1,32	2,08	3,43	5,03	6,43	4,41 5,04	6,30		
3	3,08	3,34	2,22	3,33					

### Eksperyment pomiarowy

Aby ocenić proponowaną metodykę budowy modeli MES, przeprowadzono badania doświadczalne płyty o geometrii pokazanej na rys. 3a. Dane techniczne obiektu



Rys. 3. Eksperyment pomiarowy (a), model MES badanego obiektu (b)

zaczepnięto z pracy [2]. W badaniach wykorzystano układ pomiarowy firmy LMS. Eksperyment prowadzono tak, aby zidentyfikować częstości własne drgań giętnych układu (rys. 3). Na obwodzie obiektu wybrano 32 punkty pomiarowe, w których umieszczano czujnik przyspieszenia.

Obiekt wzbudzano młotkiem modalnym. W opracowanym modelu numerycznym obiektu wykorzystano właściwości cyklicznej symetrii układu (rys. 3b) – tym samym analizowano jedną szóstą część układu płytowego. W procesie nakładania siatki elementów skończonych stosowano te same procedury co w przypadku modelu z rys. 2c. W tabl. II przedstawiono błędy częstości modelu badanego obiektu. Otrzymane rezultaty można uznać za zadowalające, a przyjętą metodykę budowy modeli MES – za prawidłową.

TABLICA II. Błąd częstości modelu MES obiektu  $\varepsilon_{mn}$  [%]

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6
1	-10,39	5,29	11,81	4,30	2,08	1,13	0,80
2	4,76	-0,31	-1,70	-1,16	0,17	0,98	
3	3,02	3,30	1,95				

### Podsumowanie

W niniejszej pracy rozważano zagadnienia drgań poprzecznych koła zębatego. Zaproponowano trzy modele uproszczone MES. Zaprezentowane wyniki świadczą o tym, że najatrakcyjniejszy jest model, w którym uwzględniono właściwości wynikające z cyklicznej symetrii układu.

### LITERATURA

- de Silva C. "Vibration and shock handbook". Boca Raton: Taylor & Francis, 2005.
- Noga S. "Analityczne i numeryczne zagadnienia drgań układów z symetrią kołową". Rzeszów: Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, 2015.
- Bogacz R., Noga S. "Free transverse vibration analysis of a toothed gear". *Archive of Applied Mechanics*. Vol. 82, Iss. 9 (2012): pp. 1159÷1168.
- Drago R., Brown F. "The analytical and experimental evaluation of resonant response in high-speed, lightweight, highly loaded gearing". *ASME Journal of Mechanical Design*. Vol. 103, Iss. 2 (1981): pp. 346÷356.
- Grolet A., Thouverez F. "Free and forced vibration analysis of a non-linear system with cyclic symmetry: application to a simplified model". *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 331, Iss. 12 (2012): pp. 2911÷2928.
- Hashemi S., Rezaee V., Atashipour S., Girhammar U. "Accurate free vibration analysis of thick laminated circular plates with attached rigid core". *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 331 (2012): pp. 5581÷5596.