

Advanced methods of determination of friction coefficient in the machining process

Zaawansowane metody wyznaczania współczynnika tarcia w procesie skrawania

WIT GRZESIK *

DOI: <https://doi.org/10.17814/mechanik.2026.1.1>

In this article, several possibilities for integrating AI methods with FEM-based modelling for coefficient of friction (COF) prediction are reviewed and discussed. In particular, the implementation of a Grey-Box model and selected regression testing methods is presented. Results of integrating a Python interface with the FEM DEFORM package for predicting componential cutting forces and cutting temperatures using estimated COF values are provided. The performance of different friction models implemented in FEM and SPH simulation packages is compared. New trends and future research directions are also outlined.

KEYWORDS: artificial intelligence, FEM modeling, coefficient of friction (COF), Grey-Box model, friction models, cutting forces and temperature

W artykule omówiono możliwości integracji metod sztucznej inteligencji (AI) z modelowaniem metodą elementów skończonych (FEM) do prognozowania wartości współczynnika tarcia. W szczególności przedyskutowano zastosowanie tzw. modelu szarej skrzynki (Grey-Box) i kilku metod testowania regresyjnego, a podano wyniki integracji interfejsu Pythona z programem symulacyjnym DEFORM dotyczące sił skrawania i temperatury, wykorzystujące wyniki prognozy współczynnika tarcia. Porównano efekty zastosowania różnych modeli tarcia w metodach FEM i SPH. Omówiono przyszłościowe kierunki badań.

SŁOWA KLUCZOWE: sztuczna inteligencja, modelowanie MES (FEM), współczynnik tarcia (COF), model szarej skrzynki, modele tarcia, siły tnące i temperatura skrawania

Wprowadzenie

W procesie skrawania tarcie, obok oddziaływań mechanicznych i cieplnych, jest podstawowym zjawiskiem fizycznym decydującym o jego przebiegu i efektywności, w związku z wpływem na skalę dyssypacji energii i zużycie ostrza [1]. W ostatnich dekadach nastąpił znaczący postęp w rozwoju metod i technik pomiarowych mających na celu identyfikację tarcia nie tylko w aspekcie ilościowym, ale także w ujęciu mechanizmów, które mu towarzyszą w różnych warunkach termomechanicznych [1, 2, 3, 4]. Konstrukcje urządzeń do badania tarcia, tzw. tribometrów, opisano wcześniej w „Mechaniku” nr 11/2016 [2] i „Mechaniku” nr 2/2019 [3] dzięki współpracy naukowej autora z prof. J. Rechem z ENISE Saint-Etienne (Francja). W popularnym tribometrze typu *pin-on-disc* (trzpień-po-tarczy) uchwyt trzpienia odwzorowujący ostrze skrawające jest zamocowany w przystosowanym do tego celu siłomierzu

piezoelektrycznym (rys. 1a) w celu wywarcia w obszarze styku wymaganej siły normalnej (F_n) i stycznej (F_t), które należy traktować jako siły w skali makroskopowej. Wymaganą siłę normalną zapewnia sterowany tłok hydrauliczny (rys. 1b). W rezultacie można wyznaczyć wartość średniego (pozornego) współczynnika tarcia ślizgowego, tj. *makroskopowy współczynnik tarcia*, jako stosunek tych sił:

$$\mu_{app} = \frac{F_t}{F_n} = \frac{F_\gamma}{F_{\gamma N}} \quad (1)$$

W przypadku oddziaływania ostrza na materiał w procesie skrawania mierzy się zwykle siłę styczną (F_γ) i normalną ($F_{\gamma N}$) do powierzchni natarcia (A_g).

Obecnie są stosowane tribometry typu zamkniętego (*closed tribometer*), w odróżnieniu od wspomnianego tribometru *pin-on-disc* jako konstrukcji typu otwartego (*open tribometer*) jak na rys. 1b, które są montowane na nowoczesnych obrabiarkach z możliwością odświeżania powierzchni kontaktu przez ostrze skrawające i rejestracji składowych sił skrawania oraz obserwacji procesu tworzenia wióra i pomiaru temperatury kamerą termowizyjną [1, 7, 19].

Termin „współczynnik tarcia pozornego” jest używany, ponieważ może on nieznacznie różnić się od „współczynnika tarcia międzyfazowego”, wywołanego adhezją na styku trzpienia i materiału obrabianego. Te siły makroskopowe mierzone przez tribometr obejmują z jednej strony zjawiska adhezji, na które wpływają takie właściwości, jak twardość, reaktywność chemiczna i chropowatość, a z drugiej strony występuje odkształcenie plastyczne materiału obrabianego, którego nie można pominąć w warunkach kontaktu indukowanych przez ten tribometr. Dwuczłonowy model analityczny przedstawiony w [1] umożliwia wyodrębnienie współczynnika tarcia jako sumy składowej mechanicznej i adhezyjnej, tj.:

$$\mu = \mu_m + \mu_a \quad (2)$$

gdzie: μ_m – stała składowa mechaniczna, μ_a – zmienna składowa adhezyjna.

Jeśli w trzpieniu zainstaluje się termistor (rys. 1a), to można wyznaczyć strumień ciepła w wyniku dyssypacji energii tarcia. Wpływ warunków procesu skrawania konwencjonalnego i hybrydowego na proces tarcia można znaleźć w przeglądowym artykule [5] i książce [6].

* Prof. dr hab. inż. Wit Grzesik – wit.grzesik@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-3898-5119> – Opole, Polska.

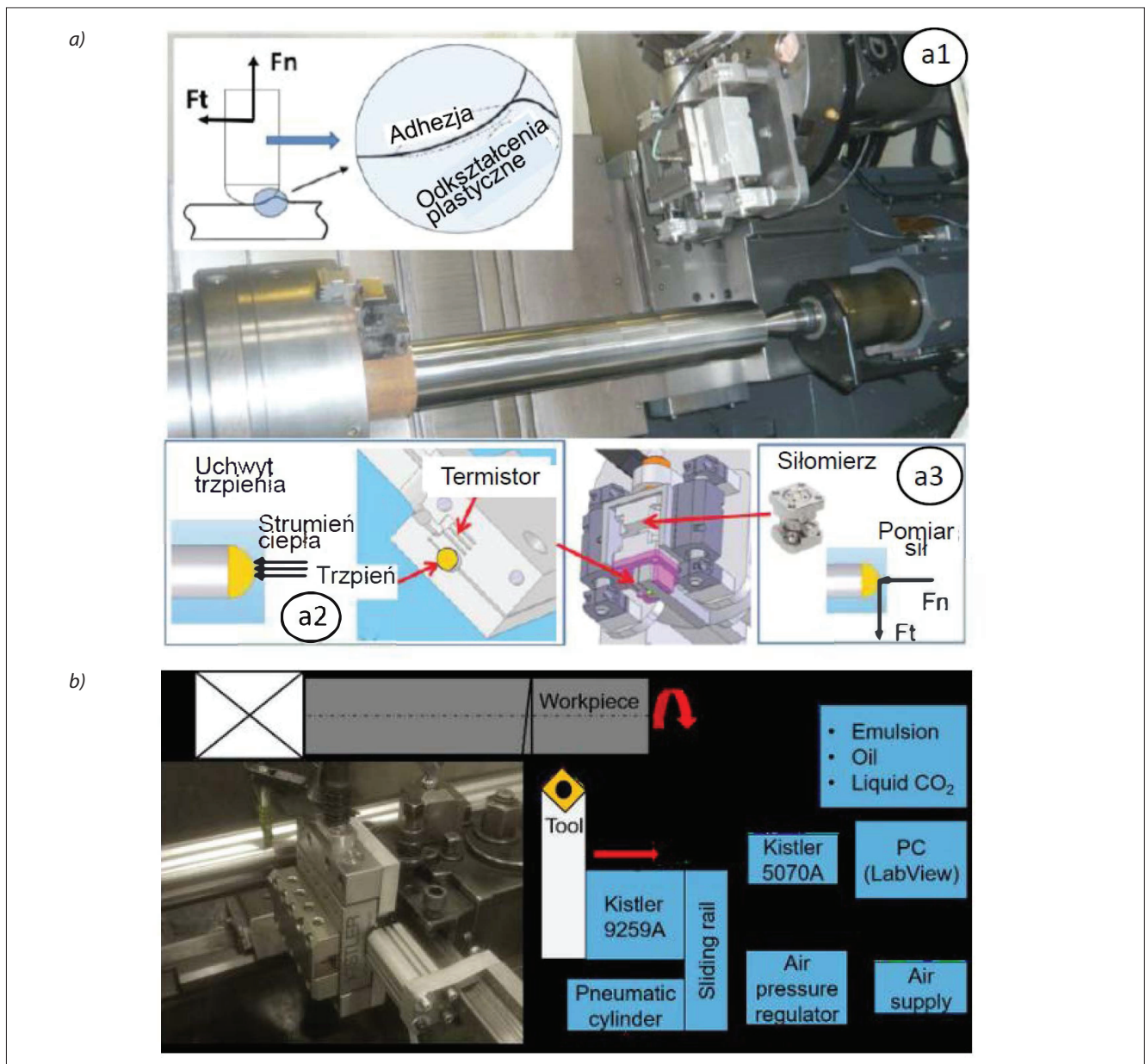


Fig. 1. A scheme of pin-on-disc tribometer showing local friction conditions in the contact (cutting) zone (a) [2], Description: 1a- view of working space, 2a- temperature and heat flux measurement, 3a- measurement of cutting forces and design of open tribometer equipped with measurement-acquisition system (b) [19]

Rys. 1. Schemat tribometru typu pin-on-disc pokazujący lokalne warunki tarcia w strefie kontaktu (skrawania) (a) [2]. a1) widok przestrzeni roboczej, a2) pomiar temperatury i strumienia ciepła, a3) pomiar sił składowych i konstrukcja tribometru typu otwartego z systemem pomiarowo-akwizycyjnym (b) [19]

Należą do nich ogólnie:

- materiał obrabiany: skład chemiczny, mikrostruktura,
- materiał ostrza narzędzia: substrat, nałożona powłoka, mikrotekstura powierzchni,
- chłodzenie/smarowanie: medium chłodząco-smarujące, technika dostarczania,
- warunki styku w parze ślizgowej.

Obecnie są stosowane tribometry typu zamkniętego (*closed tribometer*), w odróżnieniu od wspomnianego tribometru pin-on-disc jako konstrukcji typu otwartego (*open tribometer*) jak na rys. 1b, które są montowane na nowoczesnych obrabiarkach z możliwością odświeżania powierzchni kontaktu przez ostrze skrawające i rejestracji składowych sił skrawania oraz obserwacji procesu tworzenia wióra i pomiaru temperatury kamerą termowizyjną [1, 7, 19].

Metody prognozowania wartości współczynnika tarcia na podstawie danych z tribo-testów

Powszechnie stosuje się modele regresji z nadzorowanym uczeniem maszynowym (ML – *machine learning*), które po treningu mają możliwości predykcji wartości wybranych danych. Stosuje się je równocześnie z modelowaniem metodą elementów skończonych (MES/FEM), np. używając popularnego pakietu ABAQUS Explicit [8]. Wykazano przykładowo [7], że lokalnie można przewidywać wartości współczynnika tarcia w symulacjach obróbki w oparciu o warunki procesu na styku wióra z ostrzem, stosując oparty na sztucznej inteligencji model Grey-Box, czyli model *szarej skrzynki* [9]. Testowanie metodą Grey-Box (zwane również testowaniem *szarej skrzynki*) to metoda, którą można wykorzystać do debugowania (*debugging*

– wyszukiwanie i naprawianie błędów w kodzie) oprogramowania i oceny podatności na ingerencje zewnętrzne. W tej metodzie tester ma ograniczoną wiedzę na temat działania testowanego komponentu, w przeciwieństwie do testowania czarnej skrzynki (Black-Box), gdzie tester nie ma wiedzy wewnętrznej, oraz testowania białej skrzynki (White-Box), gdzie tester ma pełną wiedzę wewnętrzną. Mówiąc obrazowo: model szarego pudełka to połączenie dwóch wcześniej wspomnianych modeli, przy czym mogą one być ułożone szeregowo lub równoległe (rys. 2a) w strukturze wewnętrznej. Zmienne wejściowe są definiowane w wektorze $\vec{x}_{in}$, który jest przenoszony do modelu biało- i czarnoskrzynkowego. Z jednej strony model parametryczny służy jako idealny aproksymator dla rozpatrywanych zmiennych wyjściowych procesu który zawiera wszystkie wymagane założenia i uproszczenia. Z drugiej strony model nieparametryczny jest dostosowywany, aby określić odchylenia między modelem idealnym a rzeczywistymi dostępnymi danymi i daje skorygowany wynik $\vec{y}_{cor}$. Obie zmienne ($\vec{y}_{id}$ i $\vec{y}_{cor}$) są łączone funkcją f_{com} , która zwraca całkowitą wartość wyjściową modelu szaroskrzynkowego. Funkcja jest wybierana zgodnie z celem modelu czarnoskrzynkowego [17].

W metodzie „szarego pudełka” stosuje się różne techniki. Na przykład często stosowane *testowanie*

regresyjne to technika, która pozwala sprawdzić, czy zmiany w aplikacji lub poprawki błędów spowodowały pojawienie się błędów w istniejących komponentach [9].

Stosując, np. niestandardowy interfejs graficzny Pythona, można osiągnąć lokalne przewidywanie współczynników tarcia zależnych od prędkości poślizgu i nacisku normalnego wzdłuż krawędzi skrawającej w symulacjach obróbki. Dzięki temu można bezpośrednio wprowadzić do narzędzia MES typowe biblioteki uczenia maszynowego. Należy dodać, że pojęcie „interfejsu Pythona” odnosi się do dwóch głównych kategorii: *programistycznych*, które definiują kontrakty dla klas, oraz *graficznych* (GUI – *Graphical User Interface*), które pozwalają tworzyć aplikacje z wizualnym interfejsem użytkownika. W przypadku interfejsów programistycznych Python używa abstrakcyjnych klas bazowych (ABC), aby symulować zachowanie interfejsów znanych z innych języków, podczas gdy dla GUI dostępne są różne biblioteki, takie jak na przykład wbudowany Tkinter [11]. Podobnie w pracy [8] do prognozowania wartości naprężenia plastycznego płynięcia w modelu konstytutywnym [1] zastosowano sztuczne sieci neuronowe z modelem/ podprogramem VUHARD (VUHARD *subroutine*). Z kolei tribometr (rys. 1b) jest stosowany do generowania dużego zbioru danych odnośnie do wartości

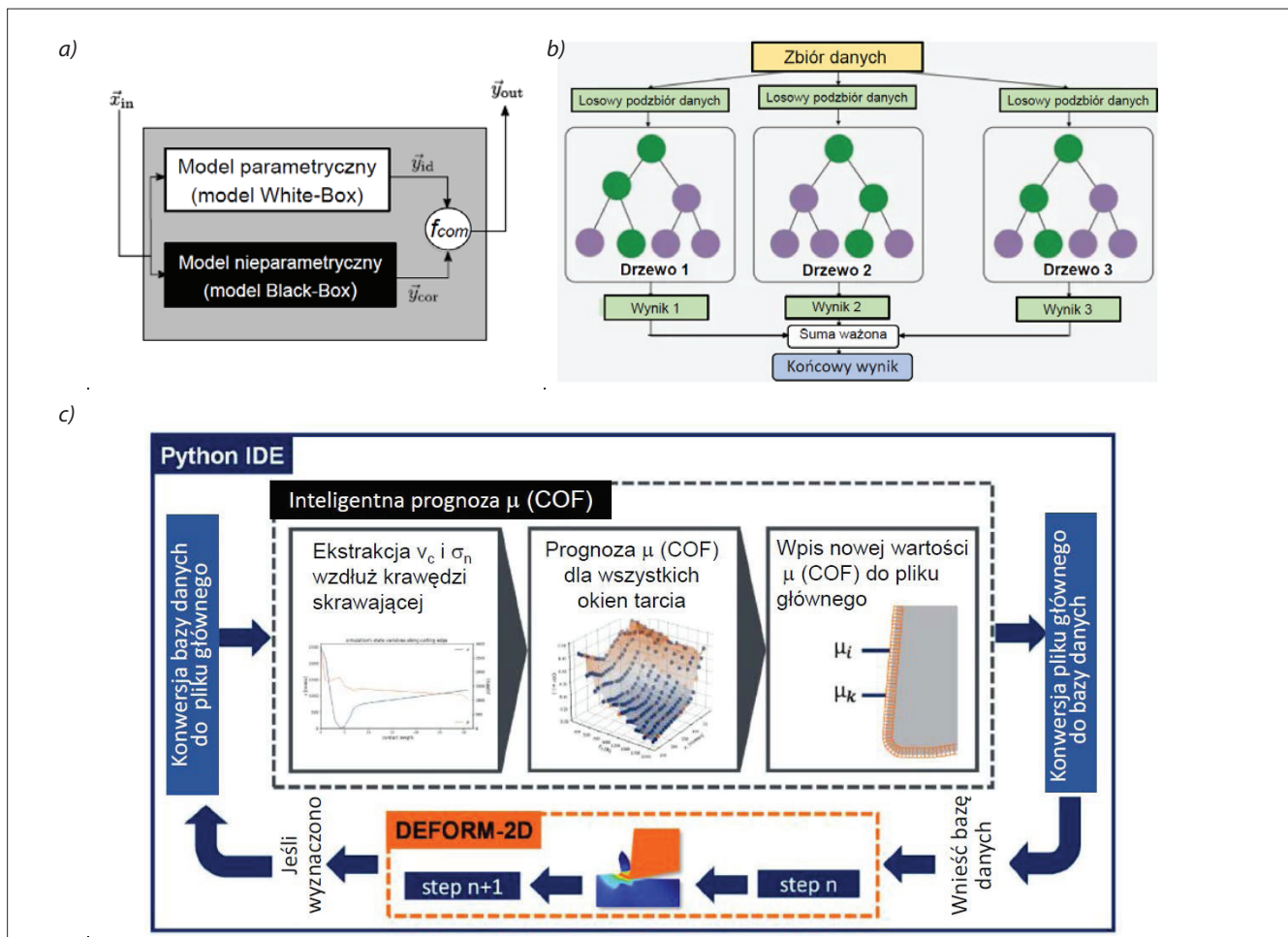


Fig. 2. Scheme of a parallel grey box model structure (a) [17], flow chart of XGBoost gradient algorithm (b) [18] and Python interface enabling data driven input of friction model in FEM DEFORM-2D package (c) [7]

Rys. 2. Schemat równoległej struktury modelu „szarego” pudełka [17] (a), schemat blokowy algorytmu gradientowego XGBoost (b) [18] i Interfejs Pythona umożliwiający wprowadzanie danych do modelu tarcia w pakiecie FEM DEFORM-2D (c) [7]

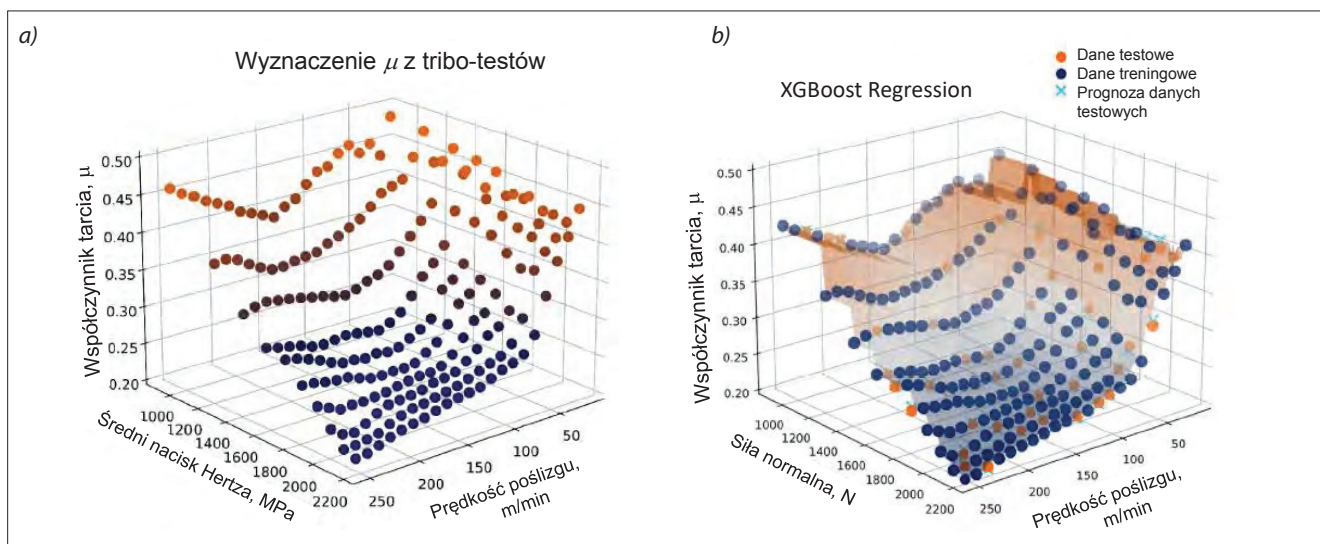


Fig. 3. Measured results of COF(a) and regression result using XGBoost algorithm (b) [7]

Rys. 3. Wyniki pomiarów (a) i analizy regresji COF z zastosowaniem algorytmu XGBoost (b) [7]

współczynnika tarcia (COF – *coefficient of friction*). Więcej informacji na temat modelowania powierzchni opartego na technikach sztucznej inteligencji, takich jak sztuczne sieci neuronowe (ANNs) czy inne metody uczenia się (ML – *Machine Learning*, DL – *Deep Learning*) podano w książce [10]. Zasadę integracji interfejsu Pythona z programem symulacyjnym DEFORM przedstawiono na rys. 2c.

XGBoost, czyli Extreme Gradient Boosting, to skalowalna, rozproszona biblioteka uczenia maszynowego dla drzew decyzyjnych (decision trees) z wykorzystaniem gradientu (GBDT). Zapewnia ona równoległe wzmacnianie drzew i jest wiodącą biblioteką uczenia maszynowego dla problemów regresji, klasyfikacji i rankingowania [18].

Drzewa decyzyjne z wykorzystaniem gradientu (GBDT) to algorytm uczenia zespołowego drzew decyzyjnych, podobny do algorytmu lasu losowego, stosowa-

wany w klasyfikacji i regresji. Algorytmy uczenia zespołowego łączą wiele algorytmów uczenia maszynowego w celu uzyskania lepszego modelu. Zarówno las losowy, jak i GBDT budują model składający się z wielu drzew decyzyjnych. Różnica polega na sposobie budowania i łączenia drzew.

Z kolei wzmocnienie gradientowe to technika uczenia maszynowego, która łączy wiele słabych modeli predykcyjnych w jeden zespół. Te słabe modele to zazwyczaj drzewa decyzyjne (np. Drzewa 1, 2 i 3 na rys. 2b), trenowane sekwencyjnie w celu minimalizacji błędów i poprawy dokładności predykcji.

Schemat blokowy algorytmu gradientowego XGBoost zbudowany z trzech drzew decyzyjnych przedstawiono na rys. 2b.

W pracy [7] łącznie zbadano cztery modele funkcji f_T (białej skrzynki) zwracającej całkowitą wartość wyjściową modelu szarego pudełka: regresję lasu losowego

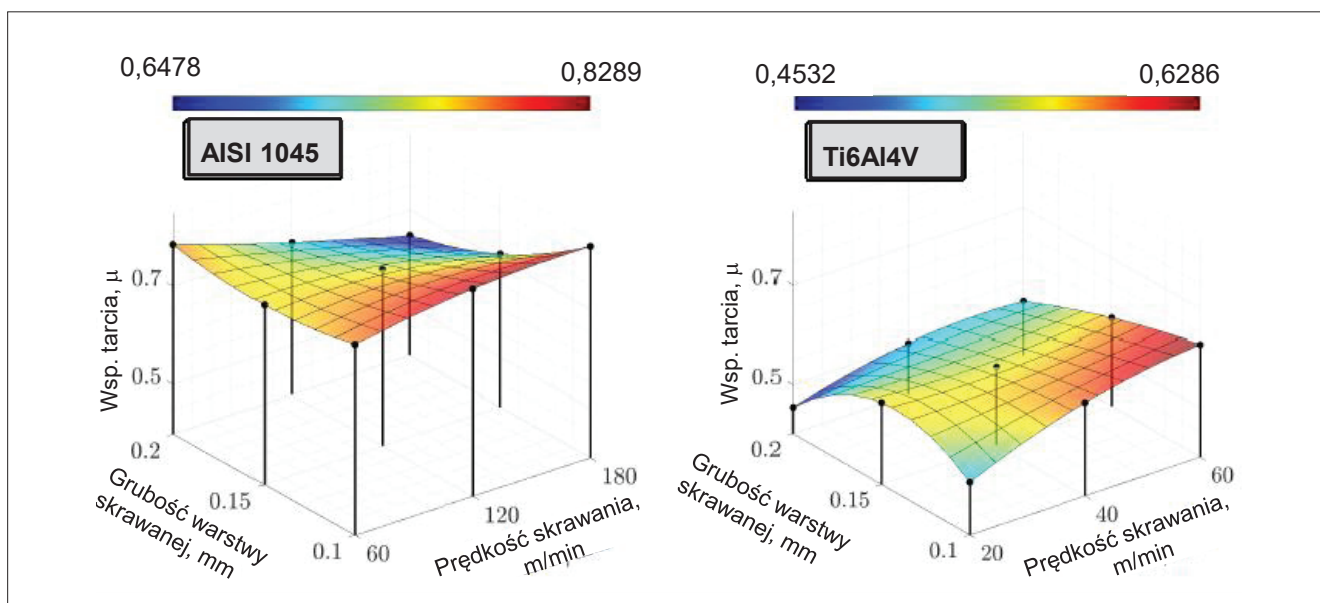


Fig. 4. Apparent coefficient of friction calculated directly from the measured componential cutting forces as function of undeformed chip thickness and cutting speed [12]

Rys. 4. Zależność wartości współczynnika tarcia wyznaczonych z pomiaru sił składowych (F_p/F_c) od grubości warstwy skrawanej i prędkości skrawania [12]

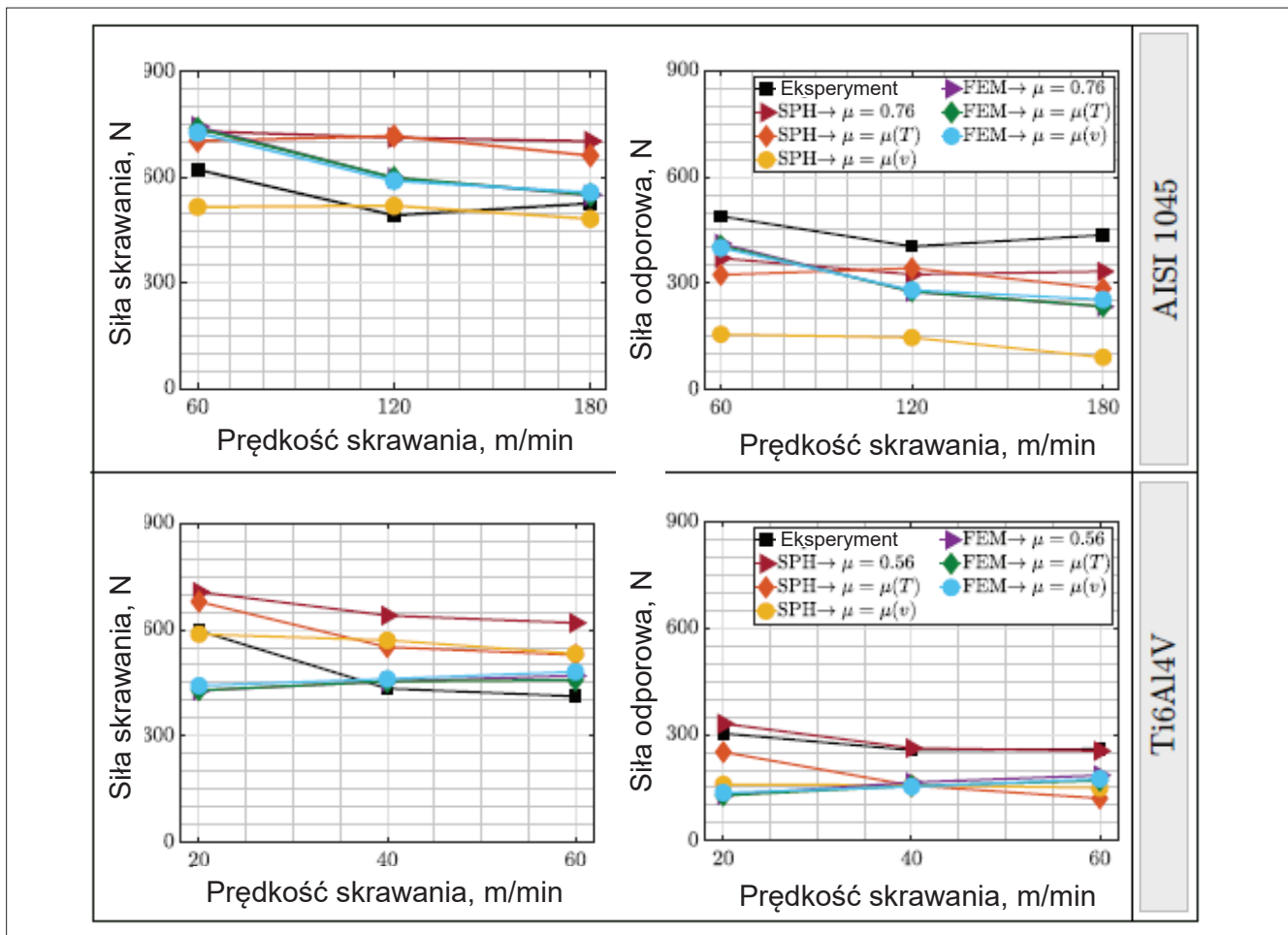


Fig. 5. Comparison of measured and predicted cutting forces at different cutting speeds and COF modelling methods ($h = 0,10$ mm) [12].

Rys. 5. Porównanie wartości składowych sił skrawania zmierzonych i wyznaczonych w symulacjach metodami FEM i SPH dla różnych prędkości skrawania i modeli tarcia ($h = 0,10$ mm) [12]

(*random forest regression* RF), regresję wektorów nośnych (*support vector regression* SVR), ekstremalne wzmocnienie gradientowe (*extreme gradient boosting* XGBoost) i sieci neuronowe z propagacją wsteczną (*Feed Forward Neural Networks* FFNN). Podane modele omówiono wcześniej w zastosowaniu do modelowania FEM sił skrawania [12, 15].

Wyniki pomiaru z tribometru i treningu jednego z zastosowanych algorytmów regresji przedstawiono na rys. 3a i 3b. Aby uzyskać istotne informacje dotyczące możliwości regresyjnych różnych algorytmów, obliczono metryki średniego błędu bezwzględnego (MAE), średniego błędu kwadratowego (MSE) i średniego błędu bezwzględnego procentowego (MAPE). Wprowadzono 1000 prób bootstrapowych, aby uzyskać wgląd w zmienność wydajności modelu spowodowaną losowym próbkowaniem. *Bootstrap*, czyli tzw. metody *samowsporne*, to metody szacowania rozkładu błędów estymacji za pomocą wielokrotnego losowania ze zwracaniem z próby [16]. Są przydatne szczególnie, gdy nie jest znana postać rozkładu zmiennej w populacji. Współczynnik regresji R^2 podano jako oszacowanie punktowe.

Wydajność uczenia wszystkich czterech modeli regresji została oceniona przy użyciu wspomnianych metryk błędów. Spośród nich model XGBoost wykazał najlepszą ogólną wydajność, osiągając najniższy średni błąd bezwzględny (MAE = 0,0025), średni błąd

kwadratowy (MSE $\approx 0,0000$) i średni bezwzględny błąd procentowy (MAPE = 0,0078), wraz z najwyższym współczynnikiem determinacji ($R^2 = 0,9913$). Drugi z kolei model, Random Forest wykazuje również wysoką dokładność predykcijną (MAE = 0,0048 i $R^2 = 0,9890$). Następnie w klasyfikacji – model wektorów nośnych (MAE = 0,0090, $R^2 = 0,9670$) i model FFNN (MAE = 0,0052, $R^2 = 0,9737$) również okazały się skuteczne.

Przedziały ufności dla metryk MAPE i MAE były największe dla XGBoost i Random Forest, co wskazuje na większą stabilność i odporność tych modeli. Natomiast FFNN wykazał wyraźnie szerszą górną granicę w swoim przedziale MAPE (do 0,316), co sugeruje zmienność względnej dokładności prognoz. Ogólnie rzecz biorąc, metody zespołowe oparte na drzewach (RF i XGBoost) przewyższyły SV i FFNN w fazie treningu, zarówno pod względem estymacji punktowych, jak i przedziałów ufności, co podkreśla ich lepszą zdolność do uchwycenia ukrytych wzorców danych z niezmienną wiarygodnością.

Interesujące jest porównanie wyników testów i następnie wykorzystania tych danych (rys. 4) do modelowania procesu metodą MES i metodą bezsiatkową SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*) [13]. Celem modelowania było osiągnięcie najmniejszych błędów prognozowania wartości składowych sił skrawania i temperatury z użyciem materiałowego

modelu konstytutywnego J-C [1]. Na rys. 4a i b przedstawiono zależność wartości współczynnika tarcia od grubości warstwy skrawanej (h) i prędkości skrawania (v_c) odpowiednio dla stali niestopowej AISI 1045 (C45) i dwufazowego stopu tytanu Ti6Al4V. W badaniach stosowano następujące warunki dla obrabianych materiałów: parametry skrawania – $v_c = 180$ m/min i 60 m/min, charakterystykę ostrza skrawającego – kąt natarcia $\gamma_o = 0^\circ$, $\alpha_o = 10^\circ$, promień krawędzi skrawającej $r_\beta = 10$ μ m. Stosowano trzy grubości warstwy skrawanej $h = 0,1$, $0,15$ i $0,20$ mm [12]. Na rys. 4 widać zdecydowane różnice w wartości μ , które są spowodowane wyższą temperaturą zmierzoną na styku wiór-ostrze i następstwem efektu zmiękczenia cieplnego trudnoskrawalnego stopu tytanu [1]. Ustalono średnią wartość współczynnika tarcia ($\bar{\mu} = 0,738$) dla stali AISI 1045, która jest o 40% większa niż dla stopu tytanu Ti6Al4V ($\bar{\mu} = 0,541$). Maksymalne wartości wyznaczono dla najmniejszej grubości warstwy skrawanej (co odpowiada największej energii właściwej skrawania [1]) i największej prędkości skrawania.

Na rys. 5 można generalnie zaobserwować, że wartości siły skrawania (F_c) i siły odporowej (F_p) nie zależą od prędkości skrawania (w przedziale $v_c = 20 \div 60$ m/min), ale zależą wyraźnie od wyznaczonego przez modelowanie współczynnika tarcia. W tym przypadku wprowadzono stałe wartości $\mu = 0,76$ i $0,56$ na podstawie danych z rys. 4 i sprawdzono zależności $\mu = f(v_c)$ i $\mu = f(T)$, stosując obydwie metody modelowania – FEM i SPH.

Średnie błędy prognozy wartości sił dla metod FEM i SPH mieszczą się w przedziale 33% do 23%, natomiast dla temperatury, za wyjątkiem temperatury na powierzchni natarcia dla stopu tytanu, prognozy są dokładniejsze – w granicach 5–20% [12].

Podsumowanie

Modelowanie procesu skrawania może być oparte na znanych metodach numerycznych, takich jak FEM i SPH, ale też wspierane przez inteligentne algorytmy regresyjne, np. ekstremalne wzmocnienie gradientowe (*extreme gradient boosting* – XGBoost), i sieci neuronowe (np. typu FFNN z propagacją wsteczną) z możliwością uczenia się, w celu dokładnego prognozowania danych wejściowych, w tym współczynnika tarcia. W badaniach eksperymentalnych, które są podstawą weryfikacji wyników modelowania ważną rolę odgrywają tribo-testy połączone integralnie z pomiarem sił składowych i temperatury czy zużycia ostrza. Wykazano, że w niektórych przypadkach dokładniejsze prognozowanie charakterystyk procesu skrawania zapewnia modelowanie metodą bezsiatkową SPH [12]. W celu osiągnięcia lepszej zgodności danych pomiarowych i symulacji można wprowadzać do pakietu FEM, np. DEFORM [15], w sposób zintegrowany różne modele tarcia, np. model tarcia ślizgowego (*shear friction model* SFM), model Coulomba (*Coulomb friction model* CFM), model hybrydowy (*hybrid friction model* HFM), model ze stałym naprężeniem stycznym (*constant-tau model* CTM).

LITERATURA

- [1] W. Grzesik, *Podstawy skrawania materiałów konstrukcyjnych*, PWN, 2018.
- [2] J. Rech, Ch. Claudin, P. Polly, C. Courbon, New aspects of metrology of frictional behaviour in metal cutting (Nowe aspekty pomiaru tarcia w skrawaniu metali), „Mechanik”, 11(2016): 1751–1753, DOI: 10.17814/mechanik.2016.11.520.
- [3] W. Grzesik, J. Rech, Methods and devices for measuring metal cutting friction and wear, „Mechanik”, 2 (2019): 85–89.
- [4] S.N. Melkote, W. Grzesik, J. Outeiro, J. Rech, V. Schulze, H. Attia, P.J. Arrazola, R. M’Saoubi, Ch. Saldana, Advances in material and friction data for modelling of metal machining, CIRP Annals, 66/2/2017, 731–754, <https://doi.org/10.1016/j.cirp.2017.05.002>.
- [5] W. Grzesik, J. Rech, Influence of machining conditions on friction in metal cutting process – A review (Wpływ warunków obróbki na tarcie w procesie skrawania metali – przegląd literatury), „Mechanik”, 4/2019, 242–248, DOI: <https://doi.org/10.17814/mechanik.2019.4.33>.
- [6] W. Grzesik, A. Ruszaj, *Hybrydowe metody obróbki materiałów konstrukcyjnych*, PWN, 2021.
- [7] A. Wolf, N.K. Bandaru, M. Dienwiebel, H.Ch. Möhring, A novel grey-box based friction model for a wide range of machining conditions, Wear, August 2025, Wear 580-581:206295, DOI: 10.1016/j.wear.2025.206295.
- [8] F. Ducobu, O. Pantalé, B. Lauwers, Predictive 3D modelling of free oblique cutting introducing an ANN-based material flow law with experimental validation over a wide range of conditions, Int. J. Adv. Manuf. Technol., 131 (2024): 921–934, <https://doi.org/10.1007/s00170-024-12956-7>.
- [9] Czym jest testowanie metodą Grey-Box?, <https://www.im-perva.com/learn/application-security/gray-box-testing/>.
- [10] W. Grzesik, K. Żak, A. Zawada-Tomkiewicz, Analiza i modelowanie powierzchni wytwarzanych w obróbce ubytkowej, PWN, 2024.
- [11] Interfejs Pytona, https://www.google.com/search?q=interfejs+Pythona&oeq=interfejs+Pythona&gs_lcrp=EgZjaHljbWUyBggAEEUYOTIHCAEQIRigATIHCAlQIRifBTIHCAMQIRifBTIHCAlQIRifBdIBCDU3NDRqMGo3qAIA&sourceid=chrome&ie=UTF-8.
- [12] M. Afrasiabi, J. Saelzer, S. Berger, I. Iovkov, H. Klippel, M. Röthlin, A. Zabel, D. Biermann, K. Wegener, A Numerical-Experimental Study on Orthogonal Cutting of AISI 1045 Steel and Ti6Al4V Alloy: SPH and FEM Modeling with Newly Identified Friction Coefficients, Metals 2021, 11, 1683, <https://doi.org/10.3390/met11111683>.
- [13] W. Grzesik, Progress in modelling and simulation of the machining process – part II: Mesh-free modelling and simulation (Postęp w modelowaniu i symulacji procesu skrawania – część II: Beziatutowe modelowanie i symulacja), „Mechanik”, 4/2024, DOI: <https://doi.org/10.17814/mechanik.2024.4.6>.
- [14] T. Reeber, J. Wolf, H.-Ch. Mohring, A Data-Driven Approach for Cutting Force Prediction in FEM Machining Simulations Using Gradient Boosted Machines, J. Manuf. Mater. Process. 2024, 8, 107, <https://doi.org/10.3390/jmmp8030107>.
- [15] M. Storchak, O. Melnyk, Y. Stepchyn, O. Shyshkova, A. Golubovskiy, O. Vozniy, Effect of Friction Model Type on Tool Wear Prediction in Machining, Machines, 13(10)/2025, 904; <https://doi.org/10.3390/machines13100904>.
- [16] Bootstrap (statystyka), [https://pl.wikipedia.org/wiki/Bootstrap_\(statystyka\)](https://pl.wikipedia.org/wiki/Bootstrap_(statystyka)).
- [17] P. Menesklo, T. Sinn, H. Nirschl, M. Gleiss, Grey Box Modelling of Decanter Centrifuges by Coupling a Numerical Process Model with a Neural Network, Minerals, 11/2021, 755. <https://doi.org/10.3390/min11070755>.
- [18] XGBoost, <https://www.geeksforgeeks.org/machine-learning/xgboost/>.
- [19] L. Sterle, F. Pušavec, M. Kalina, Determination of friction coefficient in cutting processes: comparison between open and closed tribometers, Procedia CIRP 82 (2019) 101–106, The 17th CIRP Conference on Modelling of Machining Operations, 10.1016/j.procir.2019.04.159.