

## ANALIZA DRGAŃ GIĘTYCH W PŁASZCZYŹNIE PIERŚCIENIA TIMOSHENKI WSPÓŁPRACUJĄCEGO Z TARCZĄ TRAKTOWANĄ JAKO PODŁOŻE SPRĘŻYSTE

**Streszczenie:** W pracy rozważane są drgania giętne w płaszczyźnie pierścienia Timoshenki (grubego), współpracującego z podłożem sprężystym typu Winklera. Analiza prowadzona jest z wykorzystaniem metod analitycznych i numerycznych. W dynamicznych równaniach ruchu uwzględniono trzyparametrowy model podłoża oraz wpływ bezwładności obrotowej i odkształcenia postaciowego. Otrzymane rozwiązania analityczne i numeryczne zweryfikowano badaniami doświadczalnymi. Wymagane obliczenia numeryczne wykonano w programie ANSYS.

**Słowa kluczowe:** drgania giętne w płaszczyźnie, pierścień Timoshenki, trzyparametrowe podłoże sprężyste typu Winklera.

## IN PLANE FLEXURAL VIBRATION ANALYSIS OF A TIMOSHENKO RING INTERACTING WITH THE DISK CONSIDERED AS AN ELASTIC FOUNDATION

**Summary:** In this work the in plane flexural vibration of a Timoshenko ring interacting with the foundation of a Winkler type is analysed. Analytical and numerical methods are used during investigations. The three-parameter elastic foundation is proposed. The effects of shear deformation and rotay inertia are included. Achieved results are verified by using an experimental data. Numerical models are formulated by using ANSYS software.

**Keywords:** in plane flexural vibration, Timoshenko ring, three-parameter Winkler elastic foundation.

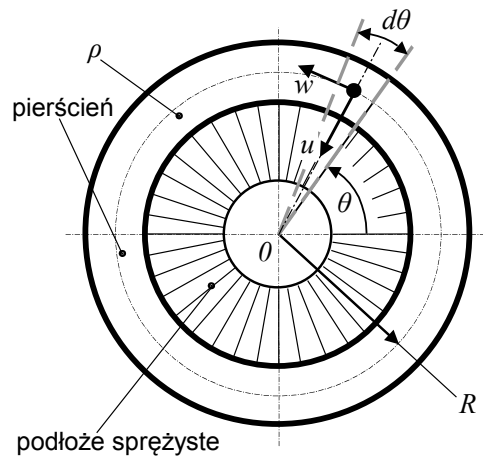
### 1. WPROWADZENIE

Zagadnienia drgań giętych w płaszczyźnie pierścieni kołowych, współpracujących z tarczami, traktowanymi jako podłoże sprężyste, znajdują zastosowanie przy analizowaniu drgań różnorodnych układów technicznych [5, 6]. Podstawy teoretyczne dotyczące drgań pierścieni kołowych, omówiono w pracy [5]. W publikacji [6], autorzy rozważyli drgania giętne w płaszczyźnie, kół zębatych, modelowanych pierścieniami cienkimi (modele Bernoulli'ego) z dwuparametrową warstwą sprężystą. W pracach [2, 4], omówiono drgania giętne w płaszczyźnie pierścieni z warstwą sprężystą stosując metodę elementów skończonych (MES) i oraz metody analityczne. W wymienionych pracach, w modelach analitycznych stosowano dwuparametrowy model podłoża sprężystego. W pracy [1], zaproponowano trzyparametrowy model warstwy sprężystej podłoża, współpracującego z pierścieniami cienkimi i grubymi (model Timoshenki). W publikacji [3], omówiono modelowanie drgań giętych w płaszczyźnie, pierścieni grubych z warstwą sprężystą, stosując metody analityczne i numeryczne (MES). Prezentowane w pracach [1, 3] rozwiązania zweryfikowano badaniami doświadczalnymi. W niniejszej pracy omówione zostaną zagadnienia drgań giętych w płaszczyźnie, pierścieni grubych współpracujących z tarczami, traktowanymi jako podłoże sprężyste. W procesie analizy wykorzystane zostaną dwa modele układu (analityczny i numeryczny). W modelu analitycznym, opracowanym z wykorzystaniem klasycznej teorii drgań pierścieni, uwzględniony zostanie trzyparametrowy model podłoża sprężystego. Zaproponowana zostanie procedura

wyznaczania zastępczej gęstości masy pierścienia w modelach składających się z pierścienia i bezmasowej warstwy sprężystej. Prezentowane badania modelowe zostaną porównane z wynikami badań doświadczalnych, wykonanych na reprezentatywnych obiektach.

## 2. MODEL ANALITYCZNY

Model rozważanego układu zawiera jednorodny pierścień kołowy i tarczę modelowaną trzyparametrowym podłożem sprężystym. Zakłada się prostokątny kształt przekroju pierścienia sprężystego. Przez  $R$  oznacza się promień linii środkowej pierścienia. Różniczkowe równania ruchu wyprowadza się przy założeniu, że nieskończenie mały wycinek układu (rys. 2.1) przemieszcza się na kierunku stycznym i promieniowym. Rozważane są małe przemieszczenia na wymienionych kierunkach, oznaczone odpowiednio:  $u(\theta, t)$  - przemieszczenie na kierunku promienia,  $w(\theta, t)$  - przemieszczenie na kierunku stycznym. Wielkość  $t$  oznacza czas a  $\theta$  to zmienna kątowa (rys. 2.1). Zgodnie z rozważaniami teoretycznymi omówionymi w pracy [1], warstwa sprężysta (tarcza) modelowana jest trzyparametrowym podłożem typu Winklera. Współczynniki sztywności uwzględniają odpowiednio:  $k_f$  - sztywność warstwy sprężystej na kierunku promienia,  $k_p$  - sztywność warstwy na kierunku stycznym i  $k_s$  - sztywność obrotową warstwy ze względu na obrót przekrojów poprzecznych pierścienia podczas drgań.



Rys. 2.1. Model rozważanego układu

Wykorzystując klasyczną teorię drgań pierścieni Timoshenki [5], można zapisać równania drgań giętych w płaszczyźnie układu, w funkcji przemieszczenia radialnego  $u(\theta, t)$  w postaci:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^6 u}{\partial \theta^6} + \left( 2 - k_f \frac{R^2}{kAG} - k_s \frac{R^2}{EI_1} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} + \left( 1 + k_p \frac{R^2}{kAG} - 2k_s \frac{R^2}{EI_1} + k_f k_s \frac{R^4}{kAGEI_1} + \right. \\
 & \left. + k_f \frac{R^4}{EI_1} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \left( k_s \frac{R^2}{EI_1} + k_p k_s \frac{R^4}{kAGEI_1} + k_p \frac{R^4}{EI_1} \right) u - \left( \frac{\rho R^2}{E} + \frac{\rho R^2}{kG} \right) \frac{\partial^6 u}{\partial \theta^4 \partial t^2} + \\
 & \left. + \frac{\rho^2 R^4}{kGE} \frac{\partial^6 u}{\partial \theta^2 \partial t^4} + \left( -2 \frac{\rho R^2}{E} + k_f \frac{\rho R^4}{kAGE} + \frac{\rho R^2}{kG} + k_s \frac{\rho R^4}{kGEI_1} + \frac{\rho AR^4}{EI_1} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^2 \partial t^2} + \right. \\
 & \left. - \frac{\rho^2 R^4}{kGE} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \left( \frac{\rho R^2}{E} + k_p \frac{\rho R^4}{kAGE} + k_s \frac{\rho R^4}{kGEI_1} + \frac{\rho AR^4}{EI_1} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$E$  to moduł Younga,  
 $G$  to moduł Kirchhoffa,  
 $I_1$  to geometryczny moment bezwładności przekroju poprzecznego pierścienia,  
 $\rho$  to gęstość masy pierścienia,  
 $A$  to pole przekroju poprzecznego pierścienia,  
 $k$  to współczynnik kształtu przekroju.

Rozwiązanie ogólne równania (2.1) przyjmuje się w postaci

$$u(\theta, t) = U(\theta)e^{i\omega t} \quad (2.2)$$

$\omega$  to częstość własna,  
 $i = \sqrt{-1}$  to jednostka urojona.

Po podstawieniu rozwiązania (2.2) do zależności (2.1) otrzymuje się równanie:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^6 U}{d\theta^6} + \left(2 - b_0 k_f - k_s \frac{a_0}{R^2}\right) \frac{d^4 U}{d\theta^4} + \left(1 + b_0 k_p - 2k_s \frac{a_0}{R^2} + k_f k_s \frac{h_0}{\rho I_1} + k_f a_0\right) \frac{d^2 U}{d\theta^2} + \\
 & - \left(k_s \frac{a_0}{R^2} + k_p k_s \frac{h_0}{\rho I_1} + k_p a_0\right) U + (c_0 + d_0) \omega^2 \frac{d^4 U}{d\theta^4} + c_0 d_0 \omega^4 \frac{d^2 U}{d\theta^2} - c_0 d_0 \omega^4 U + \\
 & - \left(-2c_0 + k_f h_0 + d_0 + k_s \frac{h_0 A}{I_1} + \rho A a_0\right) \omega^2 \frac{d^2 U}{d\theta^2} + \left(c_0 + k_p h_0 + k_s \frac{h_0 A}{I_1} + \rho A a_0\right) \omega^2 U = 0
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

gdzie:

$$a_0 = \frac{R^4}{EI_1} \quad b_0 = \frac{R^2}{kAG} \quad c_0 = \frac{\rho R^2}{E} \quad d_0 = \frac{\rho R^2}{kG} \quad h_0 = \frac{\rho R^4}{kEAG} \quad (2.4)$$

Rozwiązanie równania (2.3) przewiduje się w postaci:

$$U(\theta) = \sum_{j=1}^3 C_{jn} \sin(n\theta + \varphi_{jn}) \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.5)$$

$C_{jn}$ ,  $\varphi_{jn}$  to stałe.

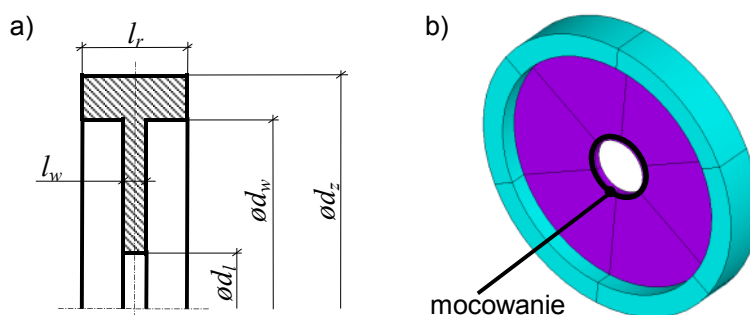
Po podstawieniu zależności (2.5) do równania (2.3) otrzymuje się równanie częstości:

$$\begin{aligned}
 & -c_0 d_0 (n^2 + 1) \omega_n^4 + \left[ (c_0 + d_0) n^4 + \left( -2c_0 + k_f h_0 + d_0 + k_s \frac{h_0 A}{I_1} + \rho A a_0 \right) n^2 + \right. \\
 & \left. + \left( c_0 + k_p h_0 + k_s \frac{h_0 A}{I_1} + \rho A a_0 \right) \right] \omega_n^2 - n^6 + \left( 2 - b_0 k_f - k_s \frac{a_0}{R^2} \right) n^4 + \\
 & - \left( 1 + b_0 k_p - 2k_s \frac{a_0}{R^2} + k_f k_s \frac{h_0}{\rho I_1} + k_f a_0 \right) n^2 - \left( k_s \frac{a_0}{R^2} + k_p k_s \frac{h_0}{\rho I_1} + k_p a_0 \right) = 0
 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Jak łatwo zauważyć, równanie (2.6) jest równaniem kwadratowym ze względu na  $\omega_n^2$ . Oznacza to, że każdemu  $n$  odpowiadają dwie wartości częstości własnych. Niższe wartości częstości są częstościami drgań giętnych w płaszczyźnie [5].

### 3. MODELE NUMERYCZE MES

W tym rozdziale omówione zostaną modele MES rozważanego układu. Modele te otrzymuje się dyskretyzując układ ciągły opisany równaniem (2.1). Częstości własne i odpowiadające im formy własne drgań giętnych w płaszczyźnie, pierścienia z warstwą sprężystą, wyznacza się wykorzystując w obliczeniach numerycznych metodę blokową Lanczosa [5]. Podobnie jak w modelu analitycznym, przyjmuje się, że w układzie występuje bezmasowa warstwa sprężysta. Wyniki rozwiązań analitycznych i numerycznych zostaną zweryfikowane w badaniach doświadczalnych. W eksperymencie będą wykorzystane układy z masową warstwą sprężystą. Oznacza to, że należy ustalić wartość zastępczej gęstości masy pierścienia  $\rho_z$ , tak aby uzyskać zadowalające wyniki weryfikacji modeli. W procesie analizy rozważa się dwa obiekty o geometrii pokazanej na rys. 3.1.



Rys. 3.1. (a) wymiary geometryczne, (b) model obiektu

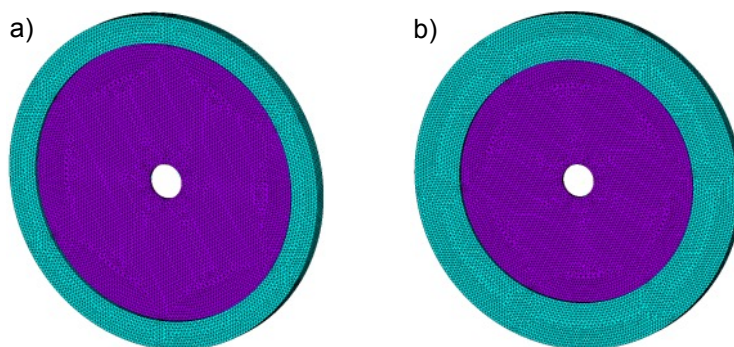
Każdy z obiektów składa się z obrzeża traktowanego jako pierścień sprężysty oraz tarczy modelowanej jako bezmasowe podłoże sprężyste. Dla każdego obiektu opracowano model MES w programie ANSYS. W procesie modelowania stosowano element czworokątny dziesięciowęzłowy (solid187) o trzech stopniach swobody w każdym węźle. W procesie modelowania pominięto masę tarczy, a zastępczą gęstość masy pierścienia  $\rho_z$  wyznacza się w symulacji numerycznej z warunku minimalizacji błędu częstości:

$$\varepsilon_n = (\omega_n^f - \omega_n^c) / \omega_n^c \cdot 100\% \quad n = 2, 3, \dots \quad (3.1)$$

$\omega_n^f$  to częstość drgań własnych modelu,

$\omega_n^c$  to częstość drgań własnych obiektu.

Na rys. 3.2 pokazano modele MES przyjętych do badań obiektów. Model obiektu nr 1 zawiera 97404 elementy skończone a w przypadku modelu obiektu nr 2 liczba elementów skończonych wynosi 143760.



Rys. 3.2. (a) model MES obiektu nr 1, (b) model MES obiektu nr 2

#### 4. ANALIZA NUMERYCZNA

W kolejnym rozdziale omówione zostaną wyniki rozwiązań analitycznych i numerycznych otrzymane dla modeli przyjętych do analizy obiektów. W każdym przypadku modelu obiektu, wyznaczono siedem pierwszych częstości drgań własnych giętnych w płaszczyźnie. W tabeli 4.1 zamieszczono dane techniczne badanych obiektów.

Tab. 4.1 Dane techniczne badanych obiektów

Lp.	$d_z$ [m]	$d_w$ [m]	$h$ [m]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$R$ [m]	$d_l$ [m]	$l_r$ [m]	$l_w$ [m]	$E$ [Pa]	$\nu$
1	0.191	0.159	0.016	$7.85 \cdot 10^3$	0.0875	0.02	0.008	0.002	$2.1 \cdot 10^{11}$	0.28
2	0.203	0.147	0.028	$7.85 \cdot 10^3$						

gdzie:

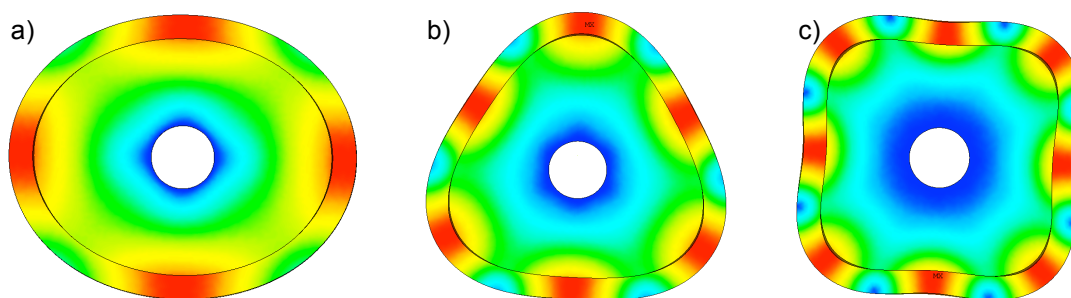
$h$  to grubość pierścienia wzdłuż promienia,  
 $\nu$  to współczynnik Poissona.

W pierwszym etapie analizy numerycznej wyznaczono zastępcze gęstości masy  $\rho_z$  pierścieni modeli MES obiektów. Zadowalające rezultaty uzyskano odpowiednio: dla modelu MES obiektu nr 1  $\rho_z = 9.8 \cdot 10^3$  [kg/m<sup>3</sup>] oraz dla modelu MES obiektu nr 2  $\rho_z = 9.17 \cdot 10^3$  [kg/m<sup>3</sup>]. Następnie wyznaczone wartości  $\rho_z$  wykorzystano w rozwiązaniach analitycznych rozważanych układów. Podobnie wartości współczynników  $k_f$ ,  $k_p$  i  $k_s$  wyznaczono w symulacji numerycznej. Otrzymane w badaniach modelowych rezultaty zamieszczono w tabeli 4.2.

Tab. 4.2 Wyniki symulacji numerycznych

Lp.	$k_f$ [N/m <sup>2</sup> ]	$k_p$ [N/m <sup>2</sup> ]	$k_s$ [N/m]	2	3	4	5	6	7	8
częstotliwości własne rozważanych modeli $\omega_n$ [Hz] (rozwiązania analityczne)										
1	$2.65 \cdot 10^9$	$6 \cdot 10^7$	$3.6 \cdot 10^7$	8747	12939	17243	21582	25944	30328	34734
2	$1.2 \cdot 10^9$	$6 \cdot 10^7$	$8.85 \cdot 10^7$	7065	12189	17158	22033	26865	31682	36500
częstotliwości własne rozważanych modeli $\omega_n$ [Hz] (rozwiązania MES)										
1	–	–	–	8903	13296	16796	20277	23931	27806	31898
2	–	–	–	7363.4	11786	15980	20439	25142	30012	34982

Na rys. 4.1 pokazano trzy postacie drgań giętnych w płaszczyźnie, odnoszące się do pierwszych trzech częstości własnych, wyznaczone na podstawie modelu MES obiektu nr 1.



Rys. 4.1. Postacie drgań własnych odnoszące się do częstości: (a)  $\omega_2$ , (b)  $\omega_3$ , (c)  $\omega_4$

## 5. BADANIA EKSPERYMENTALNE

Badania eksperymentalne przeprowadzono na dwóch obiektach o geometrii jak na rys. 3.1 i parametrach technicznych zamieszczonych w tabeli 4.1. W pomiarach wykorzystano system pomiarowy firmy LMS. Zestaw pomiarowy zawierał młotek modalny firmy PCB model 086C03, wyposażony w stalową końcówkę, czujnik przyspieszenia PCB model 353B18, system archiwizacji danych LMS SCADA oraz moduł pomiarowy typu SCM-V4E, obsługiwany przez oprogramowanie LMS Test.Lab.

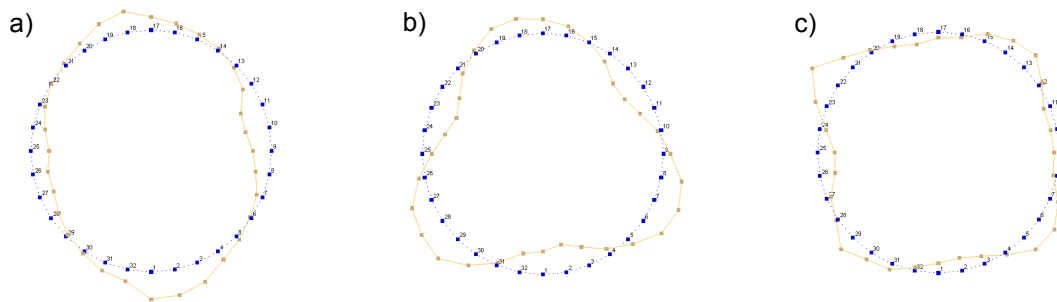


Rys. 5.1. Badania eksperymentalne

Eksperyment zaplanowano tak aby wzbudzić i zidentyfikować częstości własne oraz odpowiadające im postacie drgań giętnych w płaszczyźnie. Każdy z badanych obiektów przymocowano połączeniem śrubowym do układu o znacznej masie i wymiarach gabarytowych. Podczas eksperymentu, każdy z obiektów wzbudzano uderzeniem młotkiem modalnym w ten sam punkt. Odpowiedź układu mierzono w 32 punktach pomiarowych równo rozmieszczonych na obwodzie każdego obiektu. Wartości wzbudzonych i zidentyfikowanych częstości własnych zamieszczono w tabeli 5.1. Wartości te porównano z wynikami wygenerowanymi z modeli analitycznych i numerycznych (tab. 4.2) rozważanych obiektów. W tabeli 5.1 zamieszczono także błędy częstości (zależność (3.1)) odnoszące się do zaproponowanych modeli obiektów. Na rys. 5.2 pokazano trzy postacie drgań giętnych w płaszczyźnie, odnoszące się do pierwszych trzech częstości własnych, wyznaczone w eksperymencie pomiarowym dla obiektu nr 1.

Tab. 5.1 Wyniki badań eksperymentalnych

$n$ Lp.	2	3	4	5	6	7	8
częstotliwości własne rozważanych obiektów $\omega_n$ [Hz] (dane eksperymentalne)							
1	8660	12943.8	16802.5	20618.1	25211.9	29550.6	34155.6
2	7207.5	11537.5	16058.8	20933.8	26278.8	31647.5	37106.3
błąd częstości $\varepsilon_n$ [%] (porównanie wyników rozwiązań analitycznych z danymi eksperymentalnymi)							
1	1.01	-0.04	2.62	4.68	2.9	2.63	1.69
2	-1.98	5.65	6.84	5.25	2.23	0.11	-1.63
błąd częstości $\varepsilon_n$ [%] (porównanie wyników rozwiązań MES z danymi eksperymentalnymi)							
1	2.81	2.72	-0.04	-1.65	-5.08	-5.9	-6.61
2	2.16	2.15	-0.49	-2.36	-4.33	-5.17	-5.73



Rys. 5.2. Postacie drgań własnych odnoszące się do częstości: (a)  $\omega_2$ , (b)  $\omega_3$ , (c)  $\omega_4$

Otrzymane rezultaty są zadowalające. W obydwu rozważanych obiektach zauważa się, że lepsze dopasowanie do wyników badań eksperymentalnych występuje w przypadku rezultatów z modeli analitycznych.

#### 4. UWAGI I WNIOSKI

W artykule analizowano drgania własne giętne w płaszczyźnie, układu składającego się z pierścienia kołowego, współpracującego z tarczą traktowaną jako podłoże sprężyste. W pierwszej kolejności omówiono model analityczny układu, zawierający zaproponowane trzyparametrowe podłoże sprężyste typu Winklera. Następnie omówiono metodykę budowy modeli MES tego typu układów. Zaproponowane rozwiązania zweryfikowano efektywnie eksperymentem pomiarowym, prowadzonym z wykorzystaniem dwóch obiektów o ustalonej geometrii. Z przeprowadzonych badań symulacyjnych i doświadczalnych wynika, że zaproponowany trzyparametrowy model warstwy sprężystej pozwala uzyskać zadowalającą zgodność wyników z symulacji i eksperymentu w szerokim zakresie częstości.

#### LITERATURA

- [1] Noga S., Bogacz R., Markowski T.: *Vibration analysis of a wheel composed of a ring and a wheel-plate modelled as a three-parameter elastic foundation*. Journal of Sound and Vibration 333 (2014) 6706–6722.
- [2] Noga S., Markowski T.: *In plane flexural vibration of a ring interacting with the Winkler foundation*. Vibration in Physical System vol. XXV (2012) 305–310.

- [3] Noga S., Markowski T.: *Vibration analysis of a thick ring interacting with the disk treated as an elastic foundation*. *Vibration in Physical System* vol. XXVI (2014) 217–222.
- [4] Noga S., Markowski T., Bogacz R.: *Natural frequencies of flexural vibration of a ring with wheel–plate as the Winkler elastic foundation*. *Symulacja w Badaniach i Rozwoju* 3 (2012) 39–46.
- [5] Rao S.: *Vibration of Continuous Systems*, Wiley, Hoboken, 2007.
- [6] Wu X., Parker R.: *Vibration of rings on a general elastic foundation*. *Journal of Sound and Vibration* 295 (2006) 194–213.